

500MeV から 1GeV 領域での電子原子核
準弾性散乱及び共鳴生成反応の研究

岡山大学 大学院自然科学研究科
基礎物理科学講座 宇宙物理学研究室
学籍番号 41418130
那須忠昭

2008 年 2 月 18 日

概要

第一世代と第三世代間のニュートリノ振動のパラメータである θ_{13} の測定を目指す T2K 実験では 600 ~ 800MeV のニュートリノビームを使い、前置検出器とスーパーカミオカンデでそのニュートリノのエネルギースペクトルを測定する事によりニュートリノ振動を探す。標的は水であるためニュートリノ原子核(酸素)散乱が起こるので、精度の高いニュートリノ原子核散乱断面積の計算が必要である。また他のニュートリノ振動実験では標的に炭素が使われる。従って、この研究では原子核は酸素 (^{16}O) と炭素 (^{12}C) である。ニュートリノ原子核散乱にはベクトル型相互作用と軸型相互作用が関わる。ベクトル型相互作用と原子核効果は電子原子核散乱で精密に決める事ができる。ニュートリノ原子核散乱は精度の高い実験データがないため、まず、精度の高い実験データが存在する電子原子核散乱で、計算と実験データを比較する。この研究の主題はニュートリノ振動実験に必須な 500MeV から 1GeV 領域での電子原子核準弾性散乱及び 生成反応で精度の良いモデルを得ることである。

最初に原子核効果のない電子核子散乱を調べる。一つの 粒子を生成する反応 (生成反応) は精度の高いモデルである MAID モデルと Paschos モデル (共鳴生成反応) を併用する。次に原子核効果として、我々のグループの特徴である原子核内の核子の正確な束縛エネルギー運動量分布のスペクトル関数や散乱された核子が原子核内で再散乱する終状態相互作用を用いる。また用いる準弾性散乱は核子の形状因子を考慮した相対論的モデルである。

電子核子散乱断面積計算結果、 生成反応領域は 共鳴生成反応と非共鳴反応による寄与が定性的にわかった。次にこの計算モデルを使い、原子核効果を加えて電子原子核散乱断面積を計算した結果、スペクトル関数を使うモデルは元来使われていたフェルミガス模型より精度が良いことがわかった。準弾性散乱と 生成反応の境界領域における散乱断面積は、元来のフェルミガス模型では不一致だが、スペクトル関数による核子の高エネルギー運動量の効果 + 共鳴 + 非共鳴でデータとよく一致する事がわかった。この研究により電子核子散乱と電子原子核散乱の両方を別々にかつ定性的に評価することができた。これは今回の研究により世界で初めて示された。

目次

概要	i
第 1 章 序論	1
1.1 ニュートリノ	1
1.1.1 ニュートリノ振動	1
1.1.2 ニュートリノ振動実験 (T2K、K2K 実験)	2
1.2 ニュートリノ原子核反応	3
1.3 核子の拡がり	5
1.3.1 ラザフォード散乱	5
1.3.2 相対論的效果、スピンの効果 (モット散乱)	5
1.3.3 磁気モーメント	7
1.3.4 形状因子	7
1.3.5 ローゼンブルースの公式	9
1.3.6 電子陽子散乱の実験結果	11
第 2 章 電子核子散乱と電子原子核散乱	13
2.1 電子核子散乱	13
2.1.1 運動学	13
2.1.2 共鳴生成反応	14
2.2 電子原子核散乱	19
2.2.1 運動学	19
2.2.2 計算方法 (インパルス近似)	21
2.2.3 準弾性散乱	24
2.2.4 共鳴生成反応	25
第 3 章 原子核効果	28
3.1 原子核	28
3.1.1 原子核の大きさ	28
3.1.2 殻模型	29
3.2 原子核内の核子の運動量分布	31
3.2.1 フェルミガス模型	31
3.2.2 スペクトル関数	33
3.3 終状態相互作用	36

第 4 章	計算結果と考察	41
4.1	計算結果	41
4.1.1	電子核子散乱断面積計算結果	41
4.1.2	電子原子核散乱断面積計算結果	42
4.2	考察	44
付録 A	散乱断面積の計算	46
A.1	散乱断面積	46
A.1.1	散乱断面積の定義	46
A.1.2	不変散乱振幅 ($e\mu$ 散乱)	47
A.1.3	ファイマン規則	49
A.2	電子核子散乱断面積導出	50
A.2.1	光子核子散乱断面積計算	52
付録 B	ベクトルカレント	54
B.1	アイソスピン	54
B.1.1	アイソスピンの SU(2)	54
B.2	ベクトルカレントの保存 (CVC)	55
B.2.1	弱いカレントと電磁カレントの相関	55
B.2.2	ベクトルカレント (核子の場合)	56
付録 C	エネルギーの保存モデル	57
C.1	On-Shell モデル	57
C.2	Off-Shell モデル	59
C.3	今回の計算モデル	60
C.4	エネルギー保存のモデル比較	61
付録 D	電子核子散乱と原子核散乱の比較	63
付録 E	Pauli 効果	64
参考文献		66
謝辞		68

第1章

序論

ニュートリノ振動実験では、ニュートリノが原子核標的と反応して、生成した二次粒子を測定する事で、ニュートリノのエネルギーを測定する必要がある。ニュートリノ振動の精度を上げるには、ニュートリノ原子核反応で生成される断面積と二次粒子(電子、ミュー粒子、 τ 粒子)のエネルギー分布を正確に計算できる必要がある。本章ではニュートリノ振動、ニュートリノ原子核反応、ニュートリノ核子反応と電子核子反応の関係、核子の拡がりについて説明する。

1.1 ニュートリノ

ニュートリノは、1930年に原子核の β 崩壊の過程でW. Pauliにより提案された。当時、 β 崩壊は2体崩壊を考えられていたため、放出される電子のエネルギーは離散的なものだと考えられていた。しかし、実験は電子のエネルギースペクトルは連続的なものであり、エネルギー保存が破れるのではないかと思われた。それに対し、Pauliは β 崩壊の過程では未知の中性的な粒子がエネルギー、運動量、角運動量を運び、エネルギー保存は成り立つと仮定した。実際にニュートリノの存在があきらかになったのは1953年~56年のF. ReinesとC. L. Cowanの実験である。彼らは原子炉から出る強力なニュートリノを大量に標的にあて、 $\bar{\nu}_p \rightarrow e^+ n$ の反応を確認した。

ニュートリノは確認されたが、ニュートリノの質量が完全にゼロかどうかは疑問であった。トリチウムの β 崩壊によるニュートリノ質量測定では有限質量があるかどうか示すことはできなかった。1998年にスーパーカミオカンデにおける大気ニュートリノ解析により、ニュートリノ振動の証拠が示され、ニュートリノは質量を持つことが発見された。

1.1.1 ニュートリノ振動

ニュートリノ振動とは、ニュートリノが異なる質量の固有状態の重ね合わせであるとする、ニュートリノの飛程及び時間に伴って異なる状態間を振動する現象である。ニュートリノの質量は有限であることが前提である。三つのニュートリノが有限でそれぞれ異なる質量を持つと、フレーバー^{*1}の固有状態 $|\nu_\alpha\rangle$ と異なる質量の固有状態 $|\nu_i\rangle$ の重ね合わせで書くことができる($\alpha = e, \mu, \tau, i = 1, 2, 3$)。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (1.1)$$

*1 ニュートリノの種類

ここで、 $U_{\alpha i}$ はニュートリノの混合具合を示す混合行列でユニタリ行列である。

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

ただし、 $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ 、 $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ である。 θ_{ij} は質量固有状態 ij 間の角度で、混合角と呼ばれる。 δ は複素位相である。

ここで、状態ベクトルの時間変化はシュレディンガー方程式により

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-i(E_i t - \mathbf{p}_i L)} |\nu_i\rangle \quad (1.3)$$

$$E_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2} \sim |\mathbf{p}_i| + \frac{m_i^2}{2|\mathbf{p}_i|} \quad (1.4)$$

となる。 ν_α として生成したニュートリノが距離 L を伝播したときの状態ベクトルは次のように書くことができる。

$$|\nu_\alpha(L)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-i\frac{m_i^2}{2E}L} |\nu_i\rangle \quad (1.5)$$

したがって、時刻 $t = 0$ で ν_α 、距離 L を伝播しときに ν_β へ変化している確率は

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(L) \rangle|^2 \quad (1.6) \\ = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \Phi_{ij} \\ \pm 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 2\Phi_{ij}$$

ただし、 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2 (\text{GeV}^2)$ 、伝播距離 $L(\text{km})$ 、ニュートリノエネルギー $E(\text{GeV})$ 、 $\Phi_{ij} = 1.27 \Delta m_{ij}^2 L/E$ である。 $-$ はニュートリノ、 $+$ は反ニュートリノである。

上記のニュートリノ振動のパラメータは、スーパーカミオカンデの太陽ニュートリノ解析や K2K 実験、MINOS 実験において、 $\theta_{23} \sim 45^\circ$ 、 $\Delta m_{23}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3} (\text{eV}^2)$ と測定され、スーパーカミオカンデの大気ニュートリノ解析と KamLAND において、 $\theta_{12} \sim 34^\circ$ 、 $\Delta m_{12}^2 \sim 8 \times 10^{-5} (\text{eV}^2)$ と測定されている。現在知られているニュートリノ振動のパラメータでの混合行列は

$$U \sim \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & s_{13}e^{i\delta} \\ -0.4 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & -0.6 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad |s_{13}| < 0.2 \quad (1.7)$$

となる。今後行われるニュートリノ振動実験の T2K 実験や NO ν A 実験、原子炉実験ではこのニュートリノ振動のパラメータを厳密に測定すること、まだ解明されていない θ_{13} に値があるかないかを測定することにより、ニュートリノの世代間混合の全容を解明する。ニュートリノ振動のパラメータは [27] を参照した。

1.1.2 ニュートリノ振動実験 (T2K、K2K 実験)

K2K 実験 (実験終了) や 2009 年から始まる T2K 実験はニュートリノビームを加速器で生成し、スーパーカミオカンデでそのニュートリノを測定する。スーパーカミオカンデで測定する前に前置検出器を置

くことで、伝達距離の違いによりニュートリノフラックスの差を観測し、ニュートリノ振動を観測する。K2K 実験は KEK でニュートリノを生成し、250km 先のスーパーカミオカンデで測定した。T2K 実験は茨城県東海村にある日本原子力研究所でニュートリノを生成し、295km 先にあるスーパーカミオカンデで測定する。

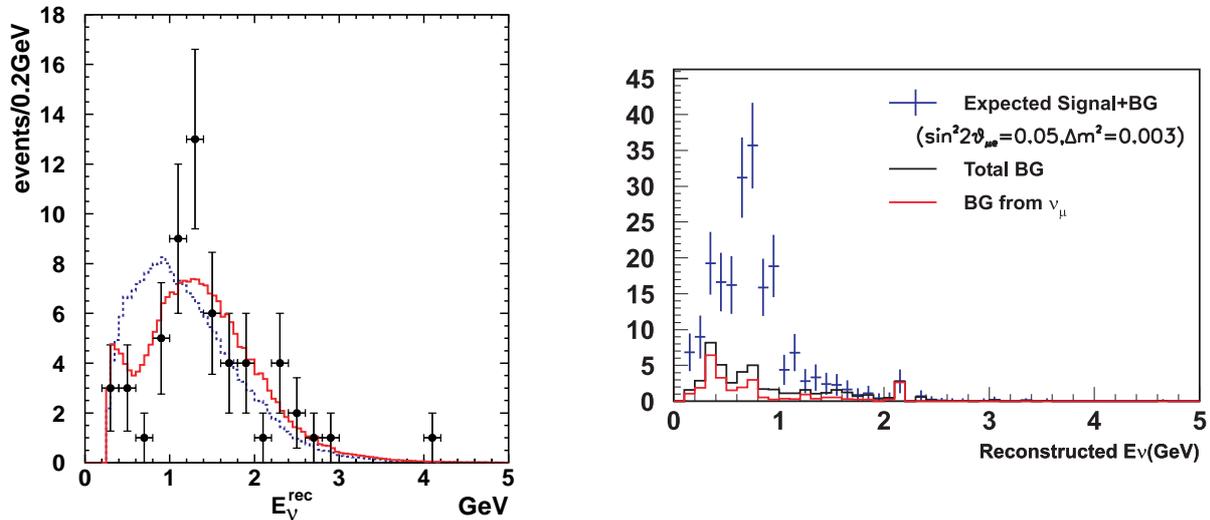


図 1.1 図はスーパーカミオカンデで観測されるニュートリノエネルギースペクトルである。縦軸は事象数、横軸はニュートリノエネルギー (GeV) である。左の図は K2K 実験における観測値で、誤差棒付きの点は ν_μ の信号、直線がニュートリノ振動ありの計算、破線がニュートリノ振動なしの計算である。右の図は T2K 実験における予測値で、誤差棒が付いた点は ν_e の信号とバックグラウンド、黒線のヒストグラムは全バックグラウンド、赤線のヒストグラムは ν_μ によるバックグラウンドである。左の図は [26]、右の図は [25] を参照した。

前置検出器で測定したニュートリノエネルギースペクトルとスーパーカミオカンデのニュートリノエネルギースペクトルを比較し、ニュートリノが振動しているかを調べる。ニュートリノは原子核 (^{16}O) と反応し、ミュー粒子 (電子) が生成され、そのミュー粒子 (電子) のエネルギーからニュートリノのエネルギーを算出する。K2K 実験 (左の図) では、断面積の計算の誤差は約 30% で十分であったが、T2K 実験 (右の図) では数 % の誤差で計算が求められる。

1.2 ニュートリノ原子核反応

ニュートリノ反応について説明する。ここでは荷電カレントによる弱い相互作用について説明する。 ν_e を電子ニュートリノ、 A を原子核、 X を散乱後の原子核とすると、ニュートリノ原子核反応過程は

$$\nu_e + A \rightarrow e + X \tag{1.8}$$

となり、ニュートリノ原子核散乱断面積は次の様に計算する。

$$\frac{d\sigma_{\nu A}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{p_0} A \left[\frac{d\sigma_{\nu N}}{dE'_e d\Omega} \right] \tag{1.9}$$

$[d\sigma_{\nu N}/dE'_e d\Omega]$ はニュートリノ核子散乱断面積であり、 $P(\mathbf{p}, E)$ は原子核内の核子の束縛エネルギー運動量分布である。それに原子核中の核子の数 A だけかける。 M/p_0 は位相因子である。図で表すと次の様になる。

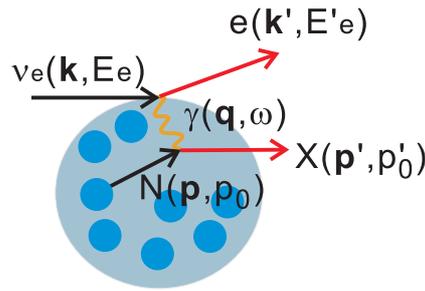


図 1.2 ニュートリノ原子核散乱の概略図。

ニュートリノ原子核散乱断面積を計算する場合、ニュートリノ核子散乱断面積により計算できる。このニュートリノ核子散乱断面積は (A.9) 式から求まる。ニュートリノ核子反応は

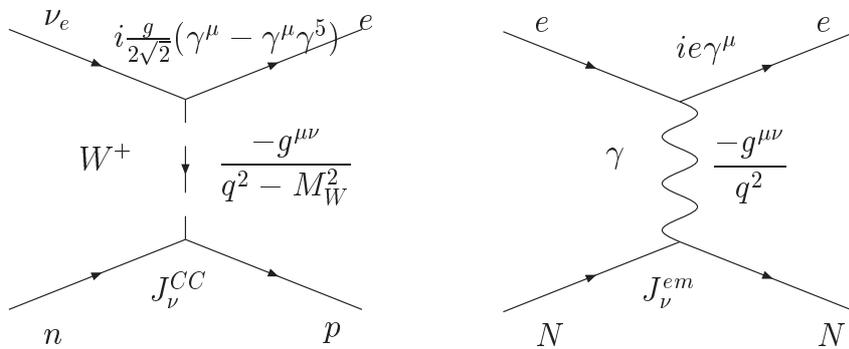


図 1.3 ニュートリノ原子核散乱と電子核子散乱によるファイマン図。 e は電子、 N は核子、 n は中性子、 p は陽子、 γ は光子、 W は W ボゾンである。

である。右の図は電子核子散乱である。相互作用の形には経験的にスカラー (S)、ベクトル (V)、テンソル (T)、軸性ベクトル (A)、擬スカラー (P) の反応で記述される。よって相互作用カレント J は

$$J = \bar{\psi}_f \Gamma_i \psi_i \tag{1.10}$$

$$\Gamma_i = 1(S), \quad \gamma_\nu(V), \quad \sigma_{\nu\alpha}(T), \quad \gamma_\nu\gamma^5(A), \quad i\gamma^5(P) \tag{1.11}$$

の組み合わせで表す。電磁相互作用の場合はベクトル (V) 型で計算され、弱い相互作用 (ニュートリノ反応) の場合は経験的にベクトル型と軸性ベクトル型を加えたカレントで計算される。弱い相互作用のカレントは $V - A$ 型カレントと呼ばれる。よって図 1.3 の荷電カレント J_ν^{CC} 、電磁カレント J_ν^{em} は

$$\langle N(p') | J_\nu^{em} | N(p) \rangle = \bar{u}(p') \left[\gamma_\nu F_1^N(Q^2) + \frac{i\sigma_{\nu\alpha} q^\alpha}{2M} \chi_V F_2^N(Q^2) \right] u(p) \tag{1.12}$$

$$\langle p(p') | J_\nu^{CC} | n(p) \rangle = \langle p(p') | V_\nu - A_\nu | n(p) \rangle \tag{1.13}$$

$$\langle p(p') | V_\nu | n(p) \rangle = \bar{u}(p') \left[\gamma_\nu F_1^V(Q^2) + \frac{i\sigma_{\nu\alpha} q^\alpha}{2M} \chi_V F_2^V(Q^2) \right] u(p) \tag{1.14}$$

$$\langle p(p') | A_\nu | n(p) \rangle = \bar{u}(p') [\gamma_\nu \gamma_5 G_A(Q^2) + q_\nu G_p(Q^2)] u(p) \tag{1.15}$$

ただし、 $N = p, n$ である。 $F_{1,2}^N$ 、 $F_{1,2}^V$ 、 G_A 、 G_p は形状因子である。形状因子については次の節で説明する。この形状因子は CVC により (B.15) 式が導出され、

$$F_1^V = F_1^p - F_1^n, \quad \chi_V F_2^V = \chi_p F_2^p - \chi_n F_2^n \tag{1.16}$$

となる。つまり電子核子散乱断面積を精度よく計算することにより、荷電カレントのベクトル型が精度よく求まる。軸性ベクトル型の形状因子 $G_A(Q^2)$ と $G_P(Q^2)$ はニュートリノ散乱実験より求める。また中性カレントについても電磁相互作用と関連している。よって電子核子散乱断面積を精度よく計算することが重要である。また (1.9) 式の $P(p, E)$ の計算は電子原子核散乱より計算することができる。詳細は後の章で説明する。(1.13) 式,(1.14) 式,(1.15) 式は [22] を参照した。CVC は付録 B を参照。

1.3 核子の拡がり

電子核子散乱断面積を計算するとき、核子の拡がりを考慮に入れなければならない。ここでは核子による拡がりの効果 (形状因子) について説明する。

1.3.1 ラザフォード散乱

まず始めに何も効果を入れていない点同士の散乱であるラザフォード散乱について説明する。E. Rutherford は原子の正電荷が原子の中心 (原子核) に集中しているモデルを 1911 年に提案した。点電荷のつくるクーロン場による荷電粒子の散乱断面積を古典力学で計算し、それが実験とよく一致することを示し原子核の存在を立証した。このとき計算された散乱断面積はスピンなしの点電荷同士で、原子核は静止状態の散乱断面積を計算している。ラザフォードの実験は金属箔に α 粒子を衝突させる実験である。

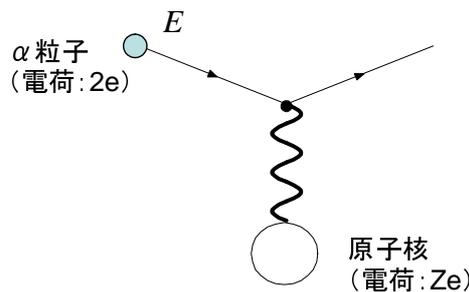


図 1.4 ラザフォード散乱による概略図

図 1.4 のような計算を考える。 α 粒子と原子核によるラザフォード散乱断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{4Z^2\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (1.17)$$

ただし、 $\alpha = e^2/(4\pi) \cong 1/137$ 、 $d\Omega = d(\cos\theta)d\phi$ である。電子核子散乱断面積の場合、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (1.18)$$

となる。

1.3.2 相対論的效果、スピンの効果 (モット散乱)

ラザフォード散乱断面積は非相対論的な計算である。高エネルギーの電子を扱う場合は相対論的效果とスピンの効果を考慮しなければならない。よって相対論的でスピンありの粒子 (ディラック粒子) として電子を扱う。核子は、点電荷 (クーロン場) として扱う

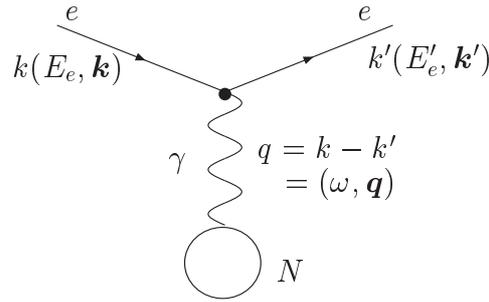


図 1.5 電子核子散乱の概略図

相互作用ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_I = -ej^\mu A_\mu, \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.19)$$

となり、A.1.2 と同様に計算すると、

$$T_{fi} = \int d^4x \langle f | \mathcal{H}_I | i \rangle = - \int d^4x \langle k', s | ej^\mu(x) | k, r \rangle A_\mu(x) \quad (1.20)$$

ただし、 $A_\mu(x) = (e/(4\pi r), 0, 0, 0)$ (クローン場)

$$e \langle k', s | j^\mu(x) | k, r \rangle = e \bar{u}_s(k') \gamma^\mu u_r(k) e^{-i(k-k')x} \quad (1.21)$$

ただし、 r, s はスピンである。 T_{fi} は

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -2\pi i \delta(E_i - E_f) \frac{e^2}{4\pi} \bar{u}_s(k') \gamma^\mu u_r(k) e^{-i(k-k')x} \int d^3x e^{i(k-k')x} \cdot \frac{1}{r} \\ &= -2\pi i \delta(E_i - E_f) \frac{e^2}{4\pi} \frac{4\pi}{q^2} \bar{u}_s(k') \gamma^\mu u_r(k) e^{-i(k-k')x} \end{aligned} \quad (1.22)$$

(A.9) 式、(A.4) 式より散乱断面積

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{4\alpha^2}{q^4} E_e'^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{k}| |\mathbf{k}'|}{E_e E_e'} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.23)$$

が求まる。電子質量 m_e を無視すると、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{4\alpha^2}{q^4} E_e'^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.24)$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.25)$$

となる。これは1930年にN. F. Mottが導いたので、モット散乱断面積と呼ぶ。ラザフォード散乱断面積((1.18)式)と比較すると、 $\cos^2(\theta/2)$ が余分に加わっている。この項は電子の相対論的効果、スピン効果である。

次に、核子に補正を加える。ラザフォード散乱断面積とモット散乱断面積では核子について反跳とスピンの効果を考慮していなかった。核子も電子同様に相対論的、スピンありの粒子(ディラック粒子)として扱うと、A.1.2の $e\mu$ 散乱でミュー粒子の質量を核子質量に置き換えると良いので、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E_e'^2}{q^4} \frac{E_e'}{E_e} \cos^2 \frac{\theta}{2} [1 + 2\tau \tan^2(\theta/2)] \quad (1.26)$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \frac{E_e'}{E_e} [1 + 2\tau \tan^2(\theta/2)] \quad (1.27)$$

となる。ただし、 $\tau = -q^2/(4M^2)$ 。ここで、反跳の効果は E'_e/E_e 、陽子のスピン効果は [...] である。反跳による効果はエネルギー運動量保存より

$$\frac{E'_e}{E_e} = \frac{1}{1 + \frac{E_e}{M}(1 - \cos \theta)} \quad (1.28)$$

となる。核子は電子やミュー粒子と違い、クォークで構成されている複合粒子なので、磁気モーメントも異なってくる。次に磁気モーメントについて説明する。

1.3.3 磁気モーメント

スピン 1/2、電荷を持ち、構造を持たない点状粒子 (電子、ミュー粒子、...) の磁気モーメントは

$$\mu = \frac{g}{2} \cdot \frac{e}{2m} \quad (1.29)$$

m は粒子の質量、因子 g はディラック方程式より $g=2$ となる。したがって荷電を持つディラック粒子は $g=2$ でなければならない。しかし、電子やミュー粒子の実験で測られた値は 2 からずれた値を持つ。これは高次の過程の寄与であると理解されている。核子は複合粒子なので、クォークにより値が変わってくる。実際の値は

$$\mu_N = \frac{e}{2M} \quad (1.30)$$

$$\mu_p = \frac{q_p}{2} \mu_N = +2.793 \cdot \mu_N = (1 + \chi_p) \cdot \mu_N$$

$$\mu_n = \frac{q_n}{2} \mu_N = -1.913 \cdot \mu_N = \chi_n \cdot \mu_N \quad (1.31)$$

である。ただし、 M は核子質量、 μ_N 、 μ_p 、 μ_n はそれぞれ核磁子、陽子の磁気モーメント、中性子の磁気モーメント、 χ_p 、 χ_n はそれぞれ陽子、中性子の異常磁気モーメントである。核子の場合、ミュー粒子や電子と異なり、この異常磁気モーメントを考慮しなければならない。また核子は複合粒子であるので点状粒子とは異なり、電荷の拡がりや磁気モーメントの拡がりを考慮しなければならない。

1.3.4 形状因子

拡がりを表す形状因子を説明する。簡単のため、電荷分布 $\rho(x)$ を用いて説明する。運動量 q の空間での電荷分布を $F(q^2)$ とする。

$$F(q^2) = \int e^{iq \cdot x} \rho(x) d^3x \quad (1.32)$$

$F(q^2)$ は空間座標 x での電荷分布 $\rho(x)$ を運動量 q にフーリエ変換した形になっている。逆フーリエ変換は

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(q^2) e^{-iq \cdot x} d^3q \quad (1.33)$$

となる。(1.32) 式より展開すると、

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \rho(x) \left[1 - \frac{1}{2} (|\mathbf{q}|r)^2 \cos^2 \theta + \dots \right] d\phi d\cos \theta r^2 dr \\ &= 4\pi \int \rho(r) r^2 dr - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \cdot 4\pi \int r^2 \rho(r) r^2 dr + \dots \end{aligned} \quad (1.34)$$

ただし、 $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{q}||\mathbf{x}| \cos \theta$ 、 $|\mathbf{x}| = r$ である。電荷分布の二乗半径を

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) r^2 dr \tag{1.35}$$

とすると、

$$F(\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle + \dots \tag{1.36}$$

となる。 $\langle r^2 \rangle$ を測るためには非常に小さな \mathbf{q}^2 を測らなければならない。つまり

$$\langle r^2 \rangle = -6 \frac{dF(\mathbf{q}^2)}{d\mathbf{q}^2} \Big|_{\mathbf{q}^2=0} \tag{1.37}$$

である。ここで、電子やミュー粒子などの構造を持たない点状の粒子の電荷分布 $\rho(r)$ 、 $F(\mathbf{q}^2)$ は以下のようになる。

$$\rho(r) = \frac{\delta(r)}{4\pi} \longrightarrow F(\mathbf{q}^2) = 1 \tag{1.38}$$

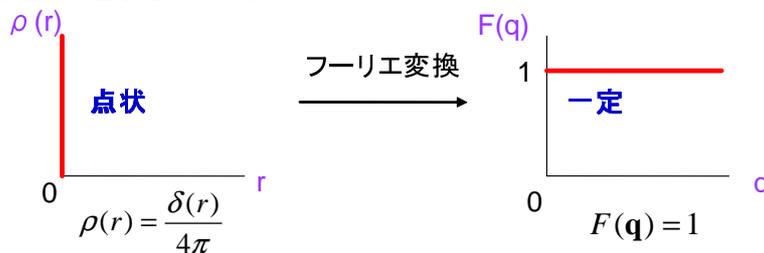
ただし、 $r = |\mathbf{x}|$ である。次に核子の場合は電荷分布は指数関数で表され、

$$\rho(r) = \frac{a^3}{8\pi} e^{-ar} \longrightarrow F(\mathbf{q}^2) = \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{a^2}\right)^{-2} \cong 1 - 2\frac{\mathbf{q}^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle \tag{1.39}$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{12}{a^2}} \tag{1.40}$$

となる。つまり、実験値と比較し、 a の値を決めることで $\langle r^2 \rangle$ が求まる。

点電荷(電子など)の場合



電荷分布が指数型(核子など)の場合

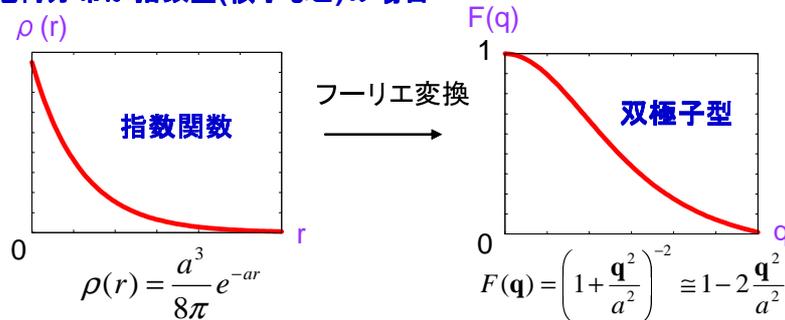


図 1.6 $F(\mathbf{q})$ と $\rho(r)$ の比較図。上の図が点状電荷の場合の粒子 (電子など)、下の図が指数関数的な電荷の拡がりを持つ場合の粒子 (核子など)。

核子の拡がりを考慮した形状因子を用い電子核子散乱断面積を計算する。

1.3.5 ローゼンブルースの公式

電子と核子をディラック粒子として扱い、核子の異常磁気モーメント、形状因子を考慮したモデルとしてローゼンブルースの公式がある。これを用い電子核子散乱断面積を計算する。電子カレントについては(1.19)式を用いる。よって核子カレントについて説明する。まず点電荷のディラック粒子のカレントについて説明する。 $i \rightarrow f$ へのカレントとして、 $\bar{u}_f \gamma^\mu u_i$ の部分は、Gordon 分解より

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f ((p_f + p_i)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu) u_i \quad (1.41)$$

となる。これはディラック方程式から導かれる $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}$ 、 $(\gamma^\nu p_{i\nu} - m)u_i = 0$ 、 $\bar{u}_f(\gamma^\nu p_{f\nu} - m) = 0$ の関係式を用いることで得られる。第一項目は電荷による項に対応していて、第二項目は磁気モーメントによる項に対応している。第二項目について具体的に説明する。簡単のため時間依存がなく、ベクトルのみで非相対論的な極限で説明する。

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i2\pi\delta(E_f - E_i) \int j_\mu^{fi} A_\mu d^3\mathbf{x} \quad (\text{第二項目のみ考える}) \\ &\sim \int \left[-\frac{e}{2m} \bar{\psi}_f \sigma_{\mu\nu} (p_f - p_i)^\nu \psi_i \right] A^\mu(x) d^3\mathbf{x} \simeq \frac{ie}{2m} \int \left[\psi_{fa}^\dagger i \frac{\sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j}{2} q^k A^j \psi_{ia} \right] d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{ie}{2m} \int \psi_{fa}^\dagger \epsilon_{ljk} \sigma_l q^j A^k \psi_{ia} d^3\mathbf{x} = \frac{ie}{2m} \int \psi_{fa}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{A}) \psi_{ia} d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{ie}{2m} \int \psi_{fa}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \psi_{ia} d^3\mathbf{x} = - \int \psi_{fa}^\dagger \left(-\frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \psi_{ia} \right) d^3\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.42)$$

なお ψ_a は ψ の上成分である。上式より $-\frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ の項が現れ、第二項目が磁気モーメントによる相互作用になることがわかる。

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e\boldsymbol{\sigma}}{2m} \quad \longrightarrow \quad T_{fi}(\text{第二項目}) \propto -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (1.43)$$

よって陽子のカレントは電荷による項と磁気モーメントによる項で構成されている。形状因子 $F_1(q^2)$ 、 $F_2(q^2)$ を用い磁気モーメントを考慮すると、

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \bar{u}_f \left[F_1(q^2) \frac{(p_f + p_i)_\alpha}{2M} + \frac{F_1(q^2) + \chi F_2(q^2)}{2M} i\sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right] u_i e^{i(p'-p)x} \\ &= \bar{u}_f \left[F_1(q^2) \gamma_\alpha + \frac{\chi F_2(q^2)}{2M} i\sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right] u_i e^{i(p'-p)x} \end{aligned} \quad (1.44)$$

ただし、 $\chi_p = 1.793$ 、中性子のとき $\chi_n = -1.913$ 。

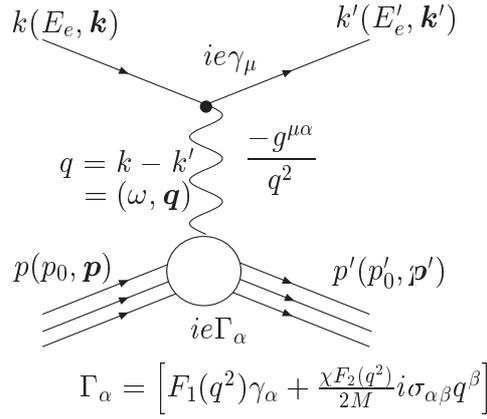
図 1.7 $eN \rightarrow eN$ のファイマン図

図 1.7 のファイマン規則から散乱振幅を計算し、(A.9) 式を用いて散乱断面積を計算する。核子静止系で計算する ($\mathbf{p} = 0, p_0 = M$)。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} &= e^2 \bar{u}_e(p_3) \gamma^\mu u_e(p_1) \frac{-1}{q^2} \bar{u}_N(p_4) \Gamma_\mu u_N(p_2) \\
|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \\
L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} &= 16M^2 E_e E'_e \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} \chi^2 F_2^2 - (F_1 + \chi F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} \tan^2(\theta/2) \right] \\
d\sigma_{eN} &= \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{|\mathbf{v}_{rel}| 2E_e 2p_0} (2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p') \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2E'_e} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0} \\
&= dE'_e d\Omega \frac{4\alpha^2 E_e'^2}{q^4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \left[F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} \chi^2 F_2^2 - (F_1 + \chi F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} \tan^2(\theta/2) \right] \\
&\quad \cdot 2M \frac{d^3 \mathbf{p}'}{2p'_0} \delta^4(k + p - k' - p') \tag{1.45}
\end{aligned}$$

ここで、 $q = k - k'$ とすると、

$$\delta(p'^2 - M^2) = \delta(p_0'^2 - \mathbf{p}'^2 - M^2) = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}} [\delta(p'_0 - \sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}) + \delta(p'_0 + \sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2})]$$

の関係式が求まり、

$$\int dp'_0 2p'_0 \theta(p'_0) \delta(p'^2 - M^2) = 1 \tag{1.46}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{2p'_0} \delta^4(p + q - p') &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{2p'_0} dp'_0 2p'_0 \theta(p'_0) \delta(p'^2 - M^2) \delta^4(p + q - p') \\
&= \delta((p + q)^2 - M^2) = \delta(q^2 + 2M\omega) \\
&= \frac{1}{2M} \delta(\omega + \frac{q^2}{2M}) \tag{1.47}
\end{aligned}$$

以上より散乱断面積は

$$\therefore \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_e d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E_e'^2}{q^4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[F_1^2 + \tau \chi^2 F_2^2 + 2\tau (F_1 + \chi F_2)^2 \tan^2(\theta/2) \right] \delta(\omega + \frac{q^2}{2M}) \tag{1.48}$$

$$\frac{d\sigma_{eN}}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E_e'^2}{q^4} \frac{E_e'}{E_e} \cos^2 \frac{\theta}{2} [F_1^2 + \tau\chi^2 F_2^2 + 2\tau(F_1 + \chi F_2)^2 \tan^2(\theta/2)] \quad (1.49)$$

ただし、 $\tau = -q^2/(4M^2)$ である。(1.49) 式はローゼンブルースの公式と呼ぶ。

電子核子弾性散乱断面積は (1.49) 式により計算できる。しかし、次のように F_1 、 F_2 の線形結合で定義する。

$$G_E \equiv F_1 - \tau\chi F_2, \quad G_M \equiv F_1 + \chi F_2 \quad (1.50)$$

より (1.49) 式は

$$\frac{d\sigma_{eN}}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E_e'^2}{q^4} \frac{E_e'}{E_e} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2(\theta/2) \right] \quad (1.51)$$

となる。 G_E 、 G_M はそれぞれ電気、磁気形状因子と呼ぶ。この項がそれぞれ電荷分布、磁気分布に対応している。

$$\frac{(1 + \tau)\epsilon}{\tau\sigma_{ns}} \frac{d\sigma_{eN}}{d\Omega} = \frac{\epsilon}{\tau} G_E(Q^2) + G_M^2(Q^2) \quad (Q^2 = -q^2 > 0) \quad (1.52)$$

$$\text{ただし、}\sigma_{ns} = \frac{4\alpha^2 E_e'^2}{q^4} \frac{E_e'}{E_e} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \epsilon = (1 + 2(1 + \tau) \tan^2(\theta/2))^{-1}$$

(1.52) 式のように変形し、 Q^2 を固定し、 θ を変えることにより、 G_E と G_M を Q^2 の関数として別々に取り出せる。この形状因子は $ep \rightarrow ep$ 散乱の角度依存性のデータを用いて、 $0 \leq Q^2 \leq 30(\text{GeV}/c)^2$ の範囲で、

$$\begin{aligned} G_M^p &= \mu_p \times (1 + 0.116Q + 2.874Q^2 + 0.241Q^3 + 1.006Q^4 + 0.345Q^5)^{-1} \\ G_E^p &= \{1 - 0.13 \times (Q^2 - 0.04)\} \times \frac{G_M^p}{\mu_p} \\ G_M^n &= \mu_n \times \frac{G_M^p}{\mu_p} \\ G_E^n &= \frac{-1.913\tau}{(1 + 5.6\tau)(1 + Q^2/0.71)^2} \end{aligned} \quad (1.53)$$

ただし、 G_E と G_M の上付きの p と n はそれぞれ陽子、中性子の形状因子である。(1.53) 式の形状因子は [23][24] を参照した。

電子核子散乱による形状因子は (1.16) 式の CVC 関係でニュートリノ核子散乱における形状因子と関連している。(1.53) 式により $F_{1,2}^N$ を計算することで、精度よく $F_{1,2}^V$ を計算することができる。

1.3.6 電子陽子散乱の実験結果

電子を陽子に衝突させ、陽子構造を解析する。R. Hofstadter は、原子核による電子散乱の研究及びそれにもなう核子の構造の発見に対し、1961 年にノーベル物理学賞を与えられている [29]。その R. Hofstadter の結果から核子の拡がりがどうわかるか説明する。

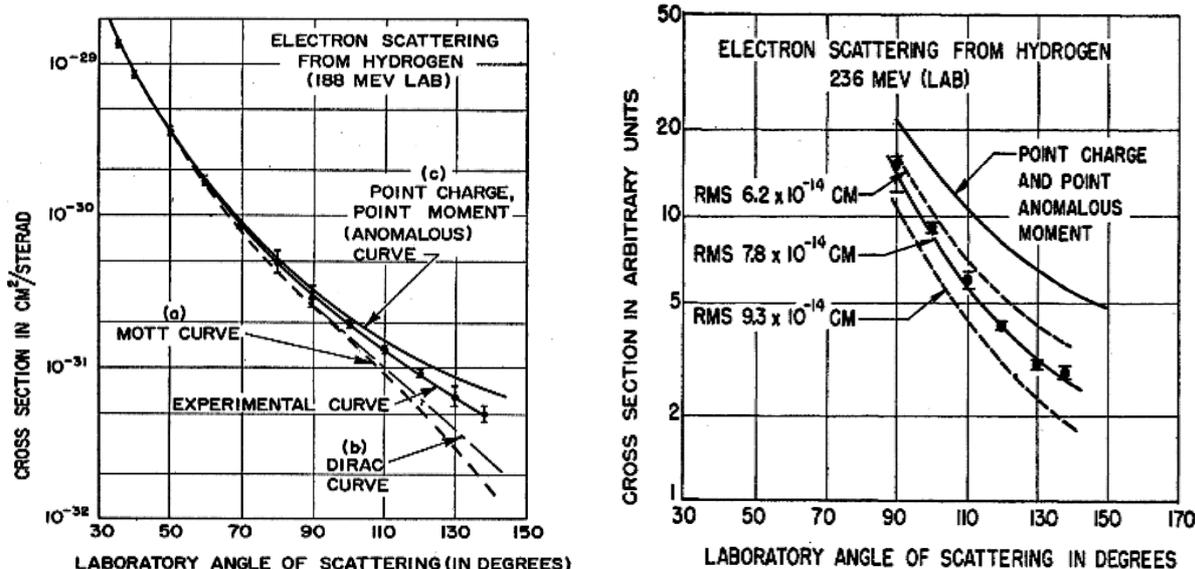


図 1.8 計算と実験データの比較したグラフ [29]。縦軸は $d\sigma/d\Omega(\text{cm}^2/\text{sr})$ で横軸は散乱角 $\theta(\text{degree})$ である。入射電子エネルギーが左の図は 188MeV で、右の図は 236MeV ある。左の図において誤差付きの点が実験データ、(a) はモット散乱断面積 ((1.24) 式)、(b) は異常磁気モーメントを考慮していない点電荷の陽子における電子陽子散乱断面積 ((1.26) 式)、(c) は点電荷の陽子における電子陽子散乱断面積、EXPERIMENTAL CURVE はローゼンブルースの公式 ((1.49) 式) である。右の図において、誤差付きの点が実験データ、一番上の直線は点電荷の陽子における電子陽子散乱断面積、下の三つの破線 ($\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 6.2 \times 10^{-14}\text{cm}$)、直線 ($\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 7.8 \times 10^{-14}\text{cm}$)、破線 ($\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 9.3 \times 10^{-14}\text{cm}$) はローゼンブルースの公式 ((1.49) 式) である。図は [29] を参照した。

図 1.8 は電子陽子散乱の実験結果と計算を比較した図である。ちなみに点電荷の陽子における電子陽子散乱断面積はローゼンブルースの公式 ((1.49) 式) $\wedge F_1(0) = 1, F_2(0) = 1, \chi_p = 1.793$ を代入した式である。点の中性子的場合、巨視的にみると、電荷はゼロなので $F_1(0) = 0, F_2(0) = 1, \chi = -1.913$ を代入した式になる。陽子の補正を考慮していない計算 ((1.24) 式、(1.26) 式) では実験データと一致しない。磁気モーメントと形状因子 (核子の拡がり) を補正したローゼンブルースの公式は実験データと一番よく合っている。図 1.8 のように実験データと合う半径を求めることにより陽子の半径を導くことができる。中性子も同様に導ける。これにより核子は拡がりをもっていることがわかる。形状因子を用い電子核子散乱断面積を計算する。

第2章

電子核子散乱と電子原子核散乱

500MeV から 1GeV の領域の電子原子核散乱断面積の計算は電子と原子核内の核子との電子核子散乱断面積を用いて計算することができる。またこの領域の電子核子散乱は弾性散乱から一つの π 粒子を生成する共鳴領域に及ぶ。この章では電子核子散乱を説明し、次に今回の主題である電子原子核散乱について説明する。

2.1 電子核子散乱

2.1.1 運動学

まず運動学について説明する。用いる運動学は実験室系である。今回、電子原子核散乱の実験室系と区別するため、核子静止系と呼ぶことにする。

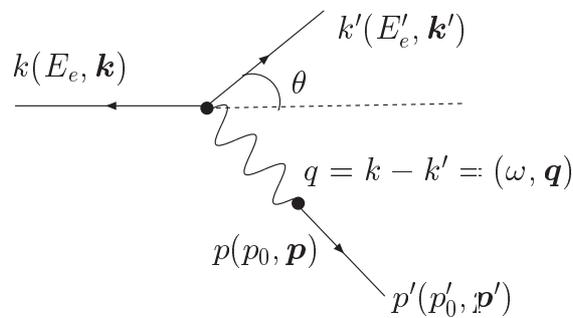


図 2.1 核子静止系による電子原子核散乱のファイマン図

変数を説明すると、 k が入射電子の四元運動量、 k' が散乱後の電子、 p が始状態の核子、 p' 散乱後の核子である。共鳴生成反応も考慮するので散乱後の核子の質量は W と定義する。 q は入射電子と散乱後の電子の差を表し、エネルギー-運動量移行と呼ばれる。

$d\sigma/(dE'_e d\Omega)$ を計算する場合の運動学は

$$k = (E_e, \mathbf{k}) = (E_e, 0, 0, E_e) \quad (2.1)$$

$$k' = (E'_e, \mathbf{k}') = (E'_e, E'_e \sin \theta, 0, E_e \cos \theta) \quad (2.2)$$

$$q = (\omega, \mathbf{q}) = k - k' = (E_e - E'_e, -\sin \theta, 0, E_e - E_e \cos \theta) \quad (2.3)$$

$$p = (p_0, \mathbf{p}) = (M, \mathbf{0}), \quad p' = (p'_0, \mathbf{p}') = (\sqrt{W^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}) \quad (2.4)$$

$$q^2 = -4E_e E'_e \sin^2(\theta/2), \quad W = \sqrt{p'^2} = \sqrt{(p + q)^2} = \sqrt{M^2 + 2M\omega + q^2} \quad (2.5)$$

となる。

$d\sigma/d\Omega$ を計算する場合の運動学は $d\sigma/(dE'_e d\Omega)$ の場合の運動学に

$$E'_e = \frac{E_e}{1 + \frac{E_e}{M}(1 - \cos \theta)} \quad (2.6)$$

を代入した値になる。

2.1.2 共鳴生成反応

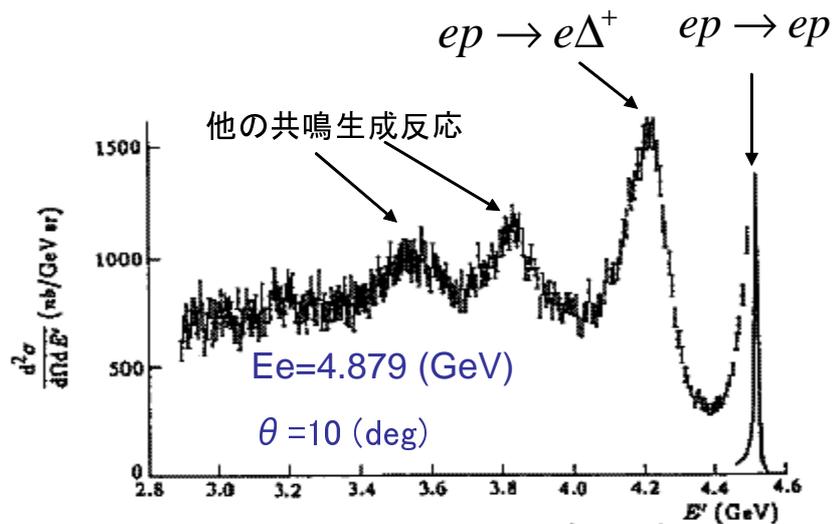
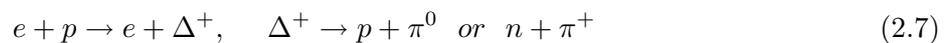


図 2.2 電子陽子散乱断面積の実験データ。[34] を参照。縦軸が散乱断面積 ($\mu\text{b}/(\text{GeV sr})$)、横軸が散乱後の電子エネルギー (GeV) である。

500MeV から 1GeV 領域の電子核子散乱では図 2.2 のように核子が共鳴する。そのピークが弾性散乱 ($ep \rightarrow ep$) より E'_e の低い領域に現れる。これは核子がエネルギーを吸収し励起した状態で、核子共鳴と呼ばれる。一番大きい最初の共鳴生成反応として Δ 共鳴生成反応が見られる。 Δ 共鳴の反応過程は



と生成され、すぐ崩壊する ($\sim 10^{-23} \text{s}$)。このように低いエネルギー領域における他の共鳴粒子は核子と π 粒子に崩壊する。500MeV から 1GeV 領域の電子核子散乱では弾性散乱と一つの π 粒子を生成する共鳴生成反応で占められる。

MAID モデル (一つの π 生成反応)

一つの π 粒子を生成する共鳴反応領域の計算について説明する。この領域の計算は MAID モデルを用いる。MAID モデルは数 GeV 領域の電子散乱のデータを一番良く再現した半現象論的計算モデルである。MAID モデルは Mainz グループによる計算で、[6] から計算データを得ることができる。詳細は [6, 7] を参照。MAID モデルの反応式は



を計算しており、

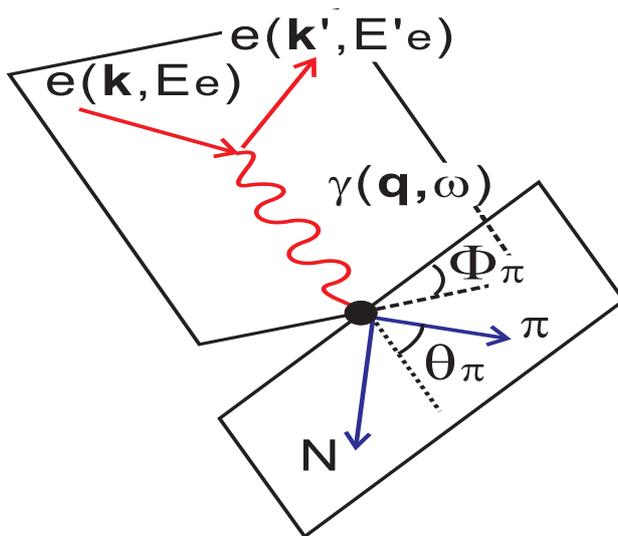


図 2.3 $\gamma^* + N \rightarrow \pi + N$ の反応による概略図。

図 2.3 の運動学を用いる。この領域で、考慮すべき反応過程は

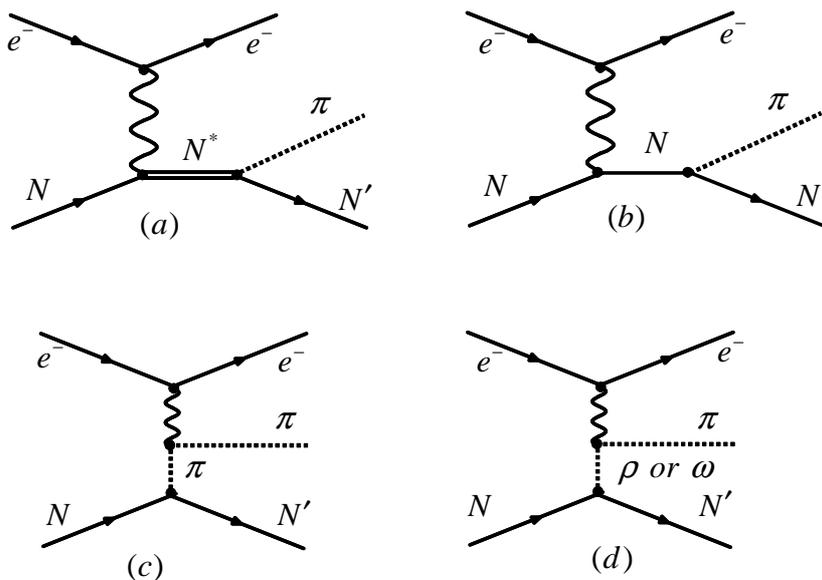


図 2.4 一つの π 生成反応におけるファイマン図。(a) は共鳴粒子、(b) は核子、(c) は π 粒子、(d) は ρ または ω 粒子による π 生成反応である。

である。 N^* は共鳴を表しており、この領域で一番多い反応は $\Delta(1232)$ 共鳴生成反応である。もちろん、他の共鳴反応も入っている。計算されている共鳴粒子は P33(1232), P11(1440), D13(1520), S11(1535), S31(1620), S11(1650), D15(1675), F15(1680), D33(1700), P13(1720), F35(1905), P31(1910), F37(1950)^{*1}である。 $\Delta(1232)$ は P33(1232) に対応する。非共鳴反応については核子 N と π 粒子の反応が主に占めている。核子の質量に近い、 $\rho(770)$ や $\omega(782)$ 中間子の反応も考慮されている。以上の共鳴と

^{*1} P33(1232) の意味について、先頭のローマ字 (P) は軌道量子数 $L = 0, 1, 2, 3 \dots$ に対応して S, P, D... と表す。ローマ字の隣の数字 (33) は左からスピン S の 2 倍と全角運動量 J の 2 倍である。(1232) 中の数字は質量 (MeV) である。

非共鳴による一つの π 生成反応の散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'_e d\Omega_\pi} = \Gamma \left[\frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi} + \epsilon_L \frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi} + \{2\epsilon_L(1+\epsilon)\}^{1/2} \frac{d\sigma_{TL}}{d\Omega_\pi} \cos \Phi_\pi + \epsilon \frac{d\sigma_{TT}}{d\Omega_\pi} \cos 2\Phi_\pi + h\{2\epsilon_L(1-\epsilon)\}^{1/2} \frac{d\sigma_{TL'}}{d\Omega_\pi} \sin \Phi_\pi + h\{1-\epsilon^2\}^{1/2} \frac{d\sigma_{TT'}}{d\Omega_\pi} \right] \quad (2.9)$$

から求まる。 σ_T は光子の横偏極による散乱断面積、 σ_L は光子の縦偏極による散乱断面積である。 $\sigma_{TL}, \sigma_{TT}, \sigma_{TL'}, \sigma_{TT'}$ は π 粒子の座標を考慮することで生じる項である。ただし横偏極 ϵ 、縦偏極 ϵ_L は

$$\epsilon = (1 + 2\mathbf{q}^2/Q^2 \tan(\theta/2))^{-1}, \quad \epsilon_L = (Q^2/\omega^2)\epsilon \quad (2.10)$$

で、 Γ は

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{E'_e}{E_e} \frac{k_\gamma}{Q^2} \frac{1}{1-\epsilon}, \quad k_\gamma = \frac{W^2 - M^2}{2M} \quad (2.11)$$

である。計算では σ_T と σ_L を用いるので、 σ_T と σ_L を示す。 σ_T と σ_L は

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma_T}{d\Omega_\pi} d\Omega_\pi = 2\pi \frac{|\mathbf{k}|}{k_\gamma^{CM}} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^2 [(l+2)(|E_{l+}|^2 + |M_{l+1,-}|^2) + l(|M_{l+}|^2 + |E_{l+1,-}|^2)] \quad (2.12)$$

$$\sigma_L = \int \frac{d\sigma_L}{d\Omega_\pi} d\Omega_\pi = 2\pi \frac{|\mathbf{k}|}{k_\gamma^{CM}} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^3 (|L_{l+}|^2 + |L_{l-}|^2) \quad (2.13)$$

である。ただし、 $k_\gamma^{CM} = (M/W)k_\gamma$ で、重心系の光子のエネルギーに対応している。散乱断面積は多重極展開 $E_{l\pm}, M_{l\pm}, L_{l\pm}$ により計算することができる。多重極展開は W, Q^2 により求まる。この多重極展開 $E_{l\pm}, M_{l\pm}, L_{l\pm}$ を実験データと精度よく計算する。

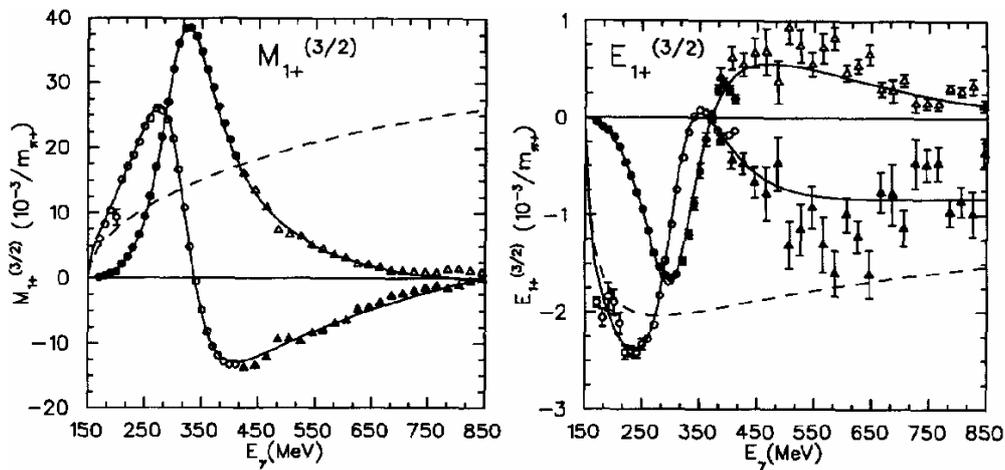


図 2.5 M_{1+} と E_{1+} の実部と虚部の比較グラフである。直線は計算である。[6] を参照。

図 2.5 のように精度よく計算された多重極展開 $E_{l\pm}, M_{l\pm}, L_{l\pm}$ を用い、散乱断面積を計算する。今回計算する散乱断面積は π 粒子を観測しないため、MAID モデルは (A.40) 式より

$$\frac{d\sigma_{eN}}{dE'_e d\Omega} = \Gamma(\sigma_T + \epsilon\sigma_L) \quad (2.14)$$

ただし、

$$\Gamma = \frac{\alpha k_\gamma}{2\pi^2(Q^2)} \frac{E'_e}{E_e} \frac{1}{1-\epsilon}, \quad k_\gamma = \frac{W^2 - M^2}{2M}, \quad \epsilon = \left(1 + 2\frac{\omega^2 + Q^2}{Q^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1} \quad (2.15)$$

である。MAID モデルの σ_T と σ_L は W と Q^2 を決めることで [6] から得られる。一つの 生成反応断面積を MAID モデルを用い計算する。

MAID モデルは全ての共鳴と非共鳴をあわせた計算であるため、一部の共鳴生成反応を抜き出すと計算精度がよくない。そこで、この領域で最も反応が大きい Δ 共鳴生成反応の計算は Paschos モデルを用いる。

Paschos モデル (Δ 共鳴生成反応)

Δ 共鳴生成反応断面積の計算モデルである Paschos モデルについて説明する。詳細は [4] を参照。反応過程として

$$e^-(k) + N(p) \rightarrow e^-(k') + \Delta(p') \quad (2.16)$$

を計算する。ただし、 $k = (E_e, \mathbf{k})$, $k' = (E'_e, \mathbf{k}')$, $p = (M, \mathbf{0})$, $p' = (p'_0, \mathbf{p}')$ である。散乱断面積の公式より

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4ME_e} |\overline{\mathcal{M}_{eN \rightarrow eX}}|^2 \delta^4(p + k - k' - p') \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2E'_e} \cdot \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0} dp'_0 P_x(\mathbf{p}', p'_0) \quad (2.17)$$

$P_x(\mathbf{p}', p'_0)$ は $\Delta(p')$ のエネルギースペクトルを示している。 $\int P_x(\mathbf{p}', p'_0) dp'_0 = 1$ となる。このエネルギースペクトルは Δ 共鳴生成反応の場合、

$$P_x(\mathbf{p}', p'_0) dp'_0 = f_{BW} dW = \frac{\Gamma/(2\pi)}{(W - M_\Delta)^2 + \Gamma/4} dW \quad (2.18)$$

$$P_x(\mathbf{p}', p'_0) = \frac{\Gamma/(2\pi)}{(W - M_\Delta)^2 + \Gamma/4} \cdot \frac{p'_0}{W}, \quad \left[W^2 = p'_0{}^2 - \mathbf{p}'^2, dp'_0 = \frac{W}{p'_0} dW \right] \quad (2.19)$$

となる。 $f_{BW}(W)$ は Breit-Wigner 型の関数である。(2.17) 式を整理すると、

$$\frac{d\sigma}{dE'_e d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{4ME_e} |\overline{\mathcal{M}_{eN \rightarrow eN}}|^2 \frac{E'_e}{2(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)^3 2p'_0} P_x(\mathbf{p}', p'_0) \quad (2.20)$$

ただし、 $p'_0 = M + \omega$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ である。 $P_x(\mathbf{p}', p'_0)$ に (2.19) 式を代入し、

$$\frac{d\sigma}{dE'_e d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{4ME_e} |\overline{\mathcal{M}_{eN \rightarrow e\Delta}}|^2 \frac{E'_e}{2(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)^3 2p'_0} f_{BW} \cdot \frac{p'_0}{W} \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{16(2\pi)^2} \frac{E'_e}{ME_e} |\overline{\mathcal{M}_{eN \rightarrow e\Delta}}|^2 f_{BW} \cdot \frac{1}{W} \quad (2.22)$$

となる。散乱振幅 $|\overline{\mathcal{M}_{eN \rightarrow e\Delta}}|^2$ については (A.23) 式より計算する。(A.24) 式、(A.28) 式より $L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$ を計算し、整理すると、

$$|\overline{\mathcal{M}_{eN \rightarrow e\Delta}}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = \frac{e^4}{Q^4} \sum_{i=1}^2 K_i W_i^N \quad (2.23)$$

ただし、 K_i は

$$K_1 = \frac{2Q^2}{E_e^2}, \quad K_2 = 4 \left(1 - \frac{Q^2}{4E_e^2} - \frac{\omega}{E_e} \right) \quad (2.24)$$

である。 W_i^N は [4] の定義を用いる。 $W_i = W_i^N \cdot f_{BW}(W)/W$ で定義されているため散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'_e} = \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E_e E'_e}{M} \sum_{i=1}^2 K_i W_i \quad (2.25)$$

となる。構造関数 W_i は

$$W_1 = \frac{W}{q_{CM}} (|T_{3/2}|^2 + |T_{1/2}|^2), \quad W_2 = \frac{M^2 Q^2}{W q_{CM}^3} (|T_{3/2}|^2 + |T_{1/2}|^2) \quad (2.26)$$

ヘリシティ振幅 T_i は

$$T_{3/2} = y \left[\left(\frac{W+M}{M} \right) C_3^V + \frac{W q_{CM}^0}{M^2} C_4^V \right] \quad (2.27)$$

$$T_{1/2} = y \left[\frac{q_{CM}^0 - p_{CM}^0 - M}{M} C_3^V + \frac{W q_{CM}^0}{M^2} C_4^V \right] \quad (2.28)$$

となる。ただし、変数の定義として

$$y = f_{BW}(W) N_{RS} q_{CM}, \quad N_{RS} = i \left[\frac{q_{CM}}{4W(p_{CM}^0 + M)} \right]^{1/2} \quad (2.29)$$

$$q_{CM}^0 = \frac{W^2 - Q^2 - M^2}{2W}, \quad q_{CM} = [((q_{CM}^0)^2 + Q^2)]^{1/2}, \quad p_{CM}^0 = [q_{CM}^2 + M^2]^{1/2} \quad (2.30)$$

を用いる。 C_3^V 、 C_4^V は形状因子である。この形状因子は核子 (アイソスピン 1/2) から Δ 粒子 (アイソスピン 3/2) へ遷移するときの形状因子である。ニュートリノ核子散乱の場合も同様の値を用い、電子陽子散乱による形状因子 C_i^p 、電子中性子散乱による形状因子 C_i^n との関係は

$$C_i^V = C_i^p = C_i^n \quad (2.31)$$

である。この形状因子は電子核子散乱実験より求められる。

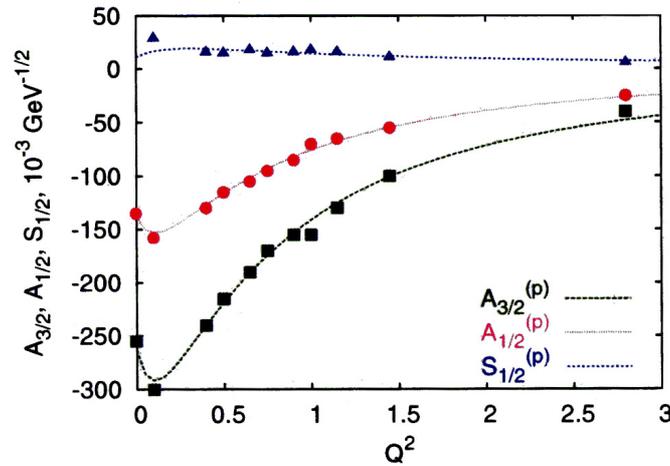


図 2.6 ヘリシティ振幅を実験データと比較した結果である。[5] を参照した。 $A_{3/2}$ と $A_{1/2}$ は $T_{3/2}$ と $T_{1/2}$ に対応している。 $S_{1/2}$ はニュートリノ核子散乱のときに関わるヘリシティ振幅である。

図 2.6 のように実験データと比較した結果、

$$C_3^V(Q^2) = \frac{C_3^V(0)}{(1 + Q^2/M_V^2)^2} \left(\frac{1}{1 + Q^2/(4M_V^2)} \right), \quad C_4^V(Q^2) = -\frac{M}{W} C_3^V(Q^2) \quad (2.32)$$

と求まる。 $C_3^V(0) = 2.13$ 、 $M_V = 0.84 \text{ GeV}$ を用いる。これらを用い、Paschos モデルとして Δ 共鳴生成反応断面積を計算する。また [5] により他の共鳴生成反応も計算されている。電子散乱による共鳴生成反応を各共鳴、非共鳴で計算することにより、実験データと比較し、形状因子 C_i^V の値を決定する。精度の良い計算モデルを用いることで、ニュートリノ核子散乱による共鳴生成反応を精度よく計算することができる。

2.2 電子原子核散乱

電子原子核散乱について説明する。まず、入射電子エネルギーと散乱後の電子エネルギーは運動量エネルギー保存から、

$$E'_e = \frac{E_e}{1 + \frac{E_e}{M}(1 - \cos \theta)} \quad (2.33)$$

となる。 M に核子質量や原子核の質量を代入することで、各々の散乱のピーク値がわかる。電子原子核散乱のスペクトルの例を見ていく。図 2.7 は電子と水との散乱された電子のスペクトルである。水素原子(陽子)との散乱、酸素の原子核との散乱が見える。

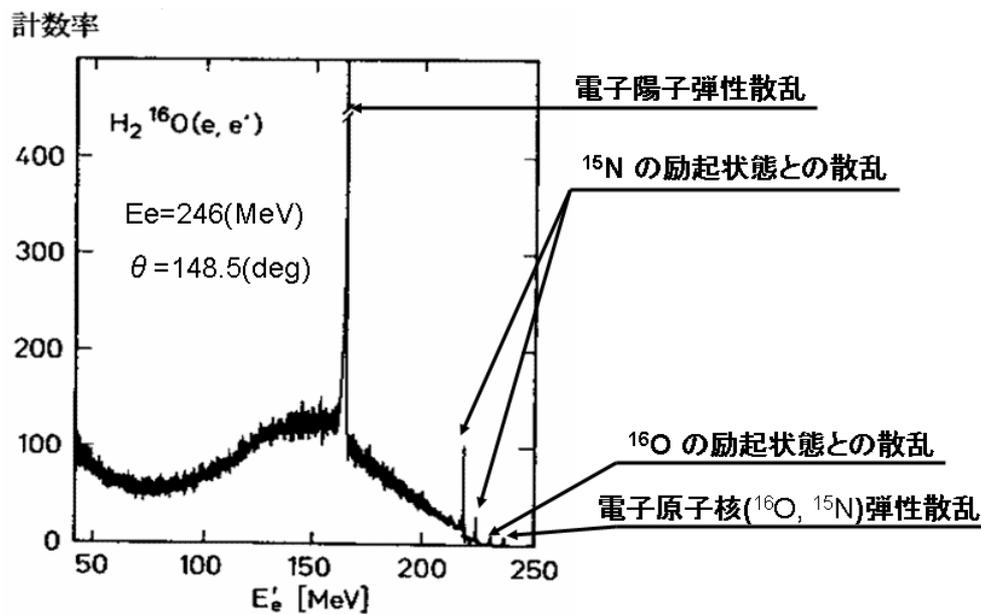


図 2.7 電子と水の散乱実験である。散乱後の電子を測っており、縦軸が計数、横軸が散乱後の電子エネルギー (E'_e) となっている。[34] から抜粋した。

しかし、酸素と水素以外にも他の散乱によるピークが見える。一つは原子核内の核子との散乱によるもので、電子陽子弾性散乱のピークの横に見える大きいピークになる。原子核内で核子は自由に動いているため、核子の運動量の違いにより散乱のピークも広がる。この電子と原子核内の核子との弾性散乱を準弾性散乱と呼ぶ。 ^{15}N の散乱が見えるのは、散乱により陽子が原子核から出て、 ^{16}O から ^{15}N になるためである。散乱エネルギーにより原子核が励起する状態がある。それによる散乱のピークも見られる。原子核の励起の状態は原子核内の核子の運動で表される集団模型などにより記述されるが、今回はエネルギーが 500MeV から 1GeV の領域なので、この集団模型は効いてこない。よって集団模型、原子核の励起については今回は触れない。

2.2.1 運動学

電子原子核散乱の運動学説明する。電子原子核散乱断面積は実験室系で計算する。

エネルギー

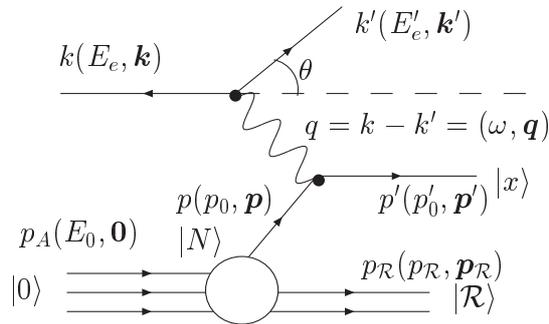


図 2.8 実験室系による電子原子核散乱のファイマン図

k が入射電子、 k' が散乱後の電子、 p が始状態の核子、 p' 散乱後の核子である。散乱後の核子の質量は W 、エネルギー-運動量移行は q である。 p_A が始状態の原子核で、 p_R が散乱後の $(A-1)$ の核子による原子核である。計算は電子核子散乱で記述され、 p_A 、 p_R は計算に入らない。

核子は原子核内で束縛されているため、束縛エネルギーを考えなければならない。束縛エネルギーを E とすると、質量損失エネルギーから決まり、

$$E = M_{A-1} + M - M_A \quad (2.34)$$

$M_A = E_0$ は原子核の質量、 M_{A-1} は $(A-1)$ の核子による原子核の質量である。また $(A-1)$ の核子による原子核の運動量エネルギー ($T_{A-1} = E_R - M_{A-1}$) は無視でき $M_{A-1} \approx E_R$ と近似できる。エネルギー保存則 ($E_0 + E_e = E'_e + p'_0 + E_R$) より (2.34) 式は

$$E = \omega - p'_0 + M \quad (2.35)$$

となる。

$$k = (E_e, \mathbf{k}) = (E_e, 0, 0, E_e) \quad (2.36)$$

$$k' = (E'_e, \mathbf{k}') = (E'_e, E'_e \sin \theta, 0, E_e \cos \theta) \quad (2.37)$$

$$q = (\omega, \mathbf{q}) = k - k' = (E_e - E'_e, -\sin \theta, 0, E_e - E_e \cos \theta) \quad (2.38)$$

$$p = (p_0, \mathbf{p}) = (\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \mathbf{p}), \quad p' = (p'_0, \mathbf{p}') = (\sqrt{W^2 + \mathbf{p}'^2}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \quad (2.39)$$

$$q^2 = -4E_e E'_e \sin^2(\theta/2), \quad W = \sqrt{p'^2} \quad (2.40)$$

また核子静止系や実験室系の計算において、ローレンツ不変量で計算するのが便利である。そこで、ローレンツ不変な量であるマンデルスタム表示 (s, t, u) を用いる。

$$\begin{aligned} s &= (k + p)^2 = M^2 + 2kp = M^2 + 2E_e(p_0 - p_z) \\ t &= (k - k')^2 = q^2 = -4E_e E'_e \sin^2(\theta/2) \\ u &= (k' - p)^2 = M^2 - 2k'p = M^2 - 2E'_e(p_0 - p_x \sin \theta - p_z \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.41)$$

上式を用いて、電子原子核散乱を計算する。

運動量

次に核子の運動量 p の運動学について説明する。

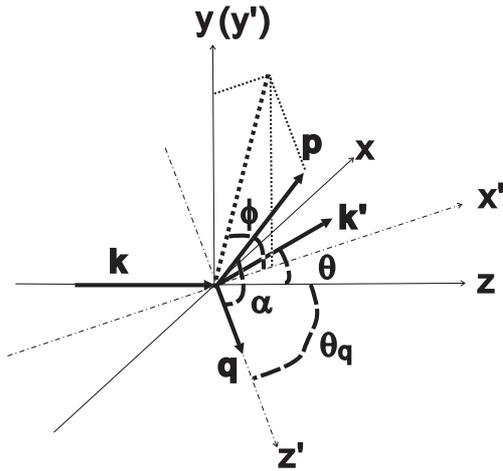


図 2.9 電子と核子の運動量

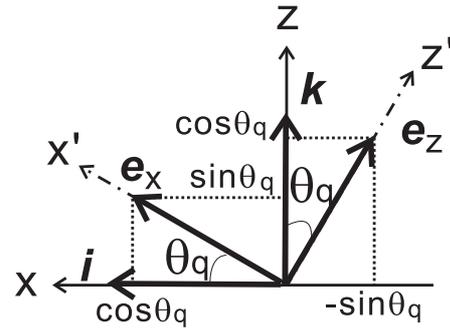


図 2.10 二次元での回転座標

上図のように計算した。 k と k' のなす角 (散乱角) を θ 、 q と z 軸なす角を θ_q とする。また q を軸にしたとき、 (x', y', z') とし、その軸における極角、方位角をそれぞれ α 、 ϕ とする。そして、 (x, y, z) 上の p を $p = (p_x, p_y, p_z)$ 、 (x', y', z') 上の p を $p = (p'_x, p'_y, p'_z) = (p \sin \alpha \cos \phi, p \sin \alpha \sin \phi, p \cos \alpha)$ とする。単位ベクトルを用いて、 p を示すと、

$$p = p_x i + p_y j + p_z k = p'_x e_x + p'_y e_y + p'_z e_z$$

ここで、 e_x, e_y, e_z を i, j, k で示すと、

$$e_y = j, e_x = \cos \theta_q i + \sin \theta_q k, e_z = -\sin \theta_q i + \cos \theta_q k, \text{ より}$$

$$\begin{aligned} p &= p'_x e_x + p'_y e_y + p'_z e_z = p'_x (\cos \theta_q i + \sin \theta_q k) + p'_y j + p'_z (-\sin \theta_q i + \cos \theta_q k) \\ &= (p'_x \cos \theta_q - p'_z \sin \theta_q) i + p'_y j + (p'_x \sin \theta_q + p'_z \cos \theta_q) k \end{aligned}$$

よって核子の運動量 $p = (p_x, p_y, p_z)$ は

$$\begin{aligned} p_x &= p'_x \cos \theta_q - p'_z \sin \theta_q \left(= \frac{p}{|q|} (q_z \sin \alpha \cos \phi + q_x \cos \alpha) \right) \\ p_y &= p'_y (= p \sin \alpha \sin \phi) \\ p_z &= p'_x \sin \theta_q + p'_z \cos \theta_q \left(= \frac{p}{|q|} (-q_x \sin \alpha \cos \phi + q_z \cos \alpha) \right) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} p'_x = p \sin \alpha \cos \phi, \quad p'_y = p \sin \alpha \sin \phi, \quad p'_z = p \cos \alpha \\ \cos \theta_q = \frac{q_z}{|q|}, \quad \sin \theta_q = \frac{-q_x}{|q|} \quad (\because q_x < 0) \end{array} \right)$$

2.2.2 計算方法 (インパルス近似)

電子原子核散乱断面積の計算方法について説明する。電子原子核散乱は以下の過程を考える。

$$e + A \rightarrow e + X \tag{2.42}$$

上式によるファイマン図は

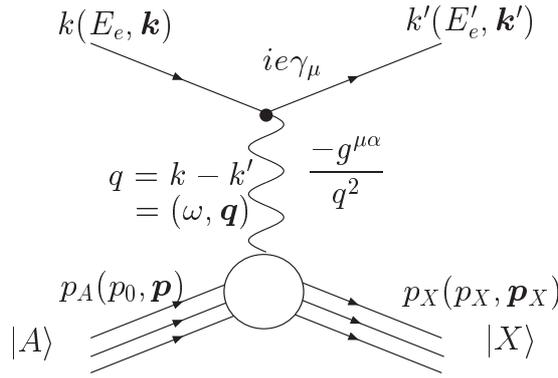


図 2.11 電子原子核散乱によるファイマン図

となり、A.2 の電子核子散乱断面積の計算と同様にすると、

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \frac{\alpha^2 E'_e}{q^4 E_e} L_{\mu\nu} W_A^{\mu\nu} \quad (2.43)$$

レプトンテンソルは (電子質量は無視)

$$L_{\mu\nu} = 2[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(kk')] \quad (2.44)$$

原子核の始状態を $|0\rangle$ 、原子核の終状態を $|X\rangle$ とすると、ハドロンテンソルは

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_X \langle 0|J^\mu|X\rangle \langle X|J^\nu|0\rangle \delta^4(p_0 + q - p_X) \quad (2.45)$$

となる。和はハドロン終状態を全てを含んでいる。今、計算する領域のエネルギー-運動量移行 q は強い
ため単純なモデルで計算することができる。

原子核内の核子と入射粒子と散乱するとき、核子が他の核子との相互作用を気にすることなく電子との
散乱する計算をインパルス近似と呼ぶ。これを用いて計算していく。インパルス近似の仮定として

1. 空間での運動量の伝達は運動量 q で伝わる。
2. 相互作用の頂点では散乱された粒子と残された原子核で独立的に展開する。

この近似では原子核のカレントは次のように書ける。

$$J^\mu \longrightarrow \sum_i j_i^\mu \quad (2.46)$$

ここで、電磁相互作用の頂点は一つの核子の運動量 p' 、(A-1) の核子による原子核の運動量 $p_{\mathcal{R}} \equiv q - p'$
にわけることができる。

$$|X\rangle \longrightarrow |x, p'\rangle \otimes |\mathcal{R}, p_{\mathcal{R}}\rangle \quad (2.47)$$

(2.45) 式を書き換える。

$$\sum_X |X\rangle \langle X| \longrightarrow \sum_x \int d^3 p_x |x, p'\rangle \langle x, p'| \sum_{\mathcal{R}} d^3 p_{\mathcal{R}} |\mathcal{R}, p_{\mathcal{R}}\rangle \langle \mathcal{R}, p_{\mathcal{R}}| \quad (2.48)$$

ファイマン図で示すと、

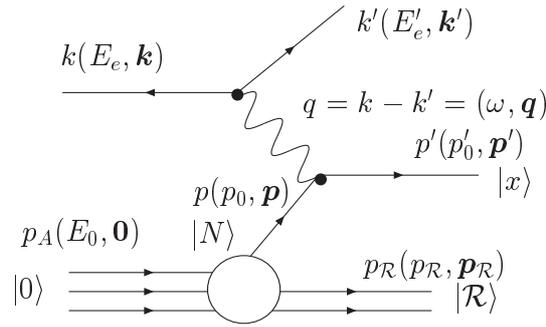


図 2.12 インパルス近似による電子原子核散乱のファイマン図

と核子と (A-1) の核子による原子核へ分解することができる。これらの式と核子の状態ベクトルを挿入すると、

$$\langle 0 | J^\mu | X \rangle = \left(\frac{M}{\sqrt{\mathbf{p}_R^2 + M^2}} \right)^{1/2} \langle 0 | \mathcal{R}, \mathbf{p}_R \rangle | N, -\mathbf{p}_R \rangle \sum_i \langle N, -\mathbf{p}_R | j_i^\mu | x, \mathbf{p}' \rangle \quad (2.49)$$

よって (2.45) 式は

$$W_A^{\mu\nu} = \sum_{x, \mathcal{R}} \int d^3 \mathbf{p}_R d^3 \mathbf{p}' \frac{M}{\sqrt{\mathbf{p}_R^2 + M^2}} |\langle 0 | \mathcal{R}, \mathbf{p}_R \rangle | N, -\mathbf{p}_R \rangle|^2 \sum_i \langle N, -\mathbf{p}_R | j_i^\mu | x, \mathbf{p}' \rangle \langle x, \mathbf{p}' | j_i^\nu | N, -\mathbf{p}_R \rangle \times \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_R - \mathbf{p}') \delta(\omega + E_0 - E_R - p'_0) \quad (2.50)$$

δ 関数について、

$$\int d^3 \mathbf{p}_R \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_R - \mathbf{p}') = 1$$

$$\delta(\omega + E_0 - E_R - p'_0) = \int dE \delta(E - m + E_0 - E_R) \delta(\omega - E + m - p'_0) \quad (2.51)$$

と計算し、 $\mathbf{p}_R = -\mathbf{p}$ とする。次にスペクトル関数は

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_R |\langle 0 | \mathcal{R}, -\mathbf{p} \rangle | N, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta(E - m + E_0 - E_R) \quad (2.52)$$

$$\int d^3 \mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) = 1 \quad (2.53)$$

と定義できる。これは分離する核子の運動量束縛エネルギー分布になっている。これらより (2.45) 式は

$$W_A^{\mu\nu}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_i \int d^3 \mathbf{p} dE W_{N_i}^{\mu\nu}(\bar{q}) \frac{M}{p_0} P(\mathbf{p}, E) \quad (2.54)$$

ここで $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ である。核子のハドロンテンソルは

$$W_{N_i}^{\mu\nu} = \sum_x \langle N, -\mathbf{p}_R | j_i^\mu | x, \mathbf{p}' \rangle \langle x, \mathbf{p}' | j_i^\nu | N, -\mathbf{p}_R \rangle \times \delta(\tilde{\omega} + p_0 - p'_0) \quad (2.55)$$

よって δ 関数より変数が決まり、

$$\tilde{\omega} = p'_0 - p_0 = \omega - E + M - p_0 \quad (2.56)$$

$$p'_0 = \omega + M - E \quad (2.57)$$

となる。エネルギーの保存については第 C 章で説明する。よってインパルス近似による電子原子核散乱断面積は

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{p_0} \left[Z \frac{d\sigma_{ep}}{dE'_e d\Omega} + (A - Z) \frac{d\sigma_{en}}{dE'_e d\Omega} \right] \quad (2.58)$$

$$\text{ただし、} \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_e d\Omega} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'_e}{E_e} L_{\mu\nu} W_N^{\mu\nu} \quad (N = p, n) \quad (2.59)$$

今回、計算する原子核は陽子と中性子の数が等しいので、

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{p_0} A \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_e d\Omega} \quad (2.60)$$

これは δ 関数の変換により $4Mp'_0$ の変数で

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) A \frac{1}{4p_0 p'_0} A \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_e d\Omega} \quad (2.61)$$

$$= \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) A \frac{1}{64\pi^2} \frac{E'_e}{E_e} \frac{1}{p_0 p'_0} |\mathcal{M}_{eN}|^2 P_x(\mathbf{p}', p'_0) \quad (2.62)$$

と等しい。(ただし、 $P_x(\mathbf{p}', p'_0)$ は $\delta(p'_0 - \sqrt{p'^2 + W^2})$ に対応した関数である。W は散乱された核子の質量である。)

(2.60) 式は [3] を、(2.62) 式は [1] を参照した。

2.2.3 準弾性散乱

準弾性散乱について (2.62) 式の計算を用いて説明する。準弾性散乱は電子と原子核内の核子の弾性散乱なので、 $|\mathcal{M}_{eN}|^2$ へ電子核子弾性散乱の不変散乱振幅を代入する。不変散乱振幅はローレンツ不変な量なので、核子静止系の (1.45) 式を代入すればよい。しかし、ここでは電子原子核散乱の実験室系の変数で、ローレンツ不変な変数を用い、定義する。これはどの系でも計算できるようにするためである。不変な変数として、マンデレストラム表示 (s, t, u) を用いる ((2.41) 式)。不変散乱振幅は (A.23) 式、ハドロンテンソルは (A.28) 式、レプトンテンソルは (A.20) 式より

$$|\mathcal{M}_{eN}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu} W_N^{\mu\nu} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} W_N^{\mu\nu} &= W_1^N \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2^N \frac{1}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \\ &= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{t} \right) W_1^N + P^\mu P^\nu W_2^N \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$L_{\mu\nu} = 2[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(kk')] = 2 \left[2K_\mu K_\nu - \frac{1}{2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{t} \right) t \right] \quad (2.65)$$

$$P^\mu = \frac{p^\mu + p'^\mu}{2}, \quad K_\mu = \frac{k_\mu + k'_\mu}{2}$$

となり

$$L_{\mu\nu} W_N^{\mu\nu} = -2tW_1^N + \frac{(s-u)^2 + 4tM^2 - t^2}{4} W_2^N \quad (2.66)$$

より

$$|\mathcal{M}_{eN}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu} W_N^{\mu\nu} = \frac{16\pi^2}{q^4} \left(-2tW_1^N + \frac{(s-u)^2 + 4tM^2 - t^2}{4} W_2^N \right) \quad (2.67)$$

ここで、 W_1^N 、 W_2^N はそれぞれ

$$W_1^N = -t(F_1^N + \chi F_2^N)^2, \quad W_2^N = 4(F_1^{N^2} + \tau \chi F_2^{N^2}) \quad (2.68)$$

(1.50) 式より

$$F_1^N = \frac{G_E^N + \tau G_M^N}{1 + \tau}, \quad \chi F_2^N = \frac{-G_E^N + G_M^N}{1 + \tau} \quad (2.69)$$

G_E^N 、 G_M^N は (1.53) 式より求まる。ただし、 $N = p, n$ である。よって、(2.62) 式より

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} P(\mathbf{p}, E) A \frac{1}{64\pi^2} \frac{E'_e}{E_e} \frac{1}{p_0 p'_0} |\mathcal{M}_{eN}|^2 \quad (2.70)$$

が求まる。ただし、 $E = \omega + M - \sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}$ 。

2.2.4 共鳴生成反応

共鳴生成反応を説明する前に、電子原子核散乱の共鳴生成反応断面積の計算 (MAID モデル) は [6] の計算結果を使うため核子静止系へ変数をローレンツ変換し、計算に用いる。

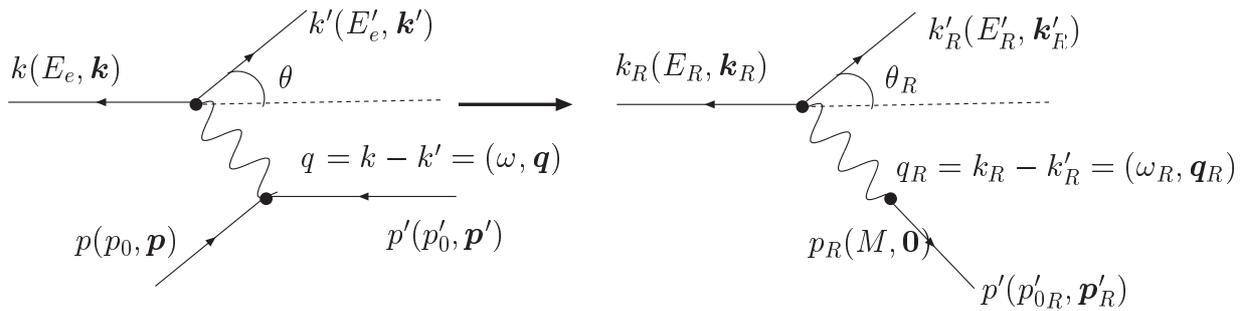


図 2.13 実験室系と核子静止系の比較した図

実験室系から核子静止系へ変換するとき、ローレンツ不変な変数で定義しなければならない。そこでマンデルスタム表示 (s, t, u) を用いる。(2.41) 式より

$$\begin{aligned} s &= (k + p)^2 = M^2 + 2kp = M^2 + 2E_e(p_0 - p_z) = M^2 + 2ME_R \\ t &= (k - k')^2 = -4E_e E'_e \sin^2(\theta/2) = -4E_R E'_R \sin^2(\theta_R/2) \\ u &= (k' - p)^2 = M^2 - 2E'_e(p_0 - p_x \sin \theta - p_z \sin \theta) = M^2 - 2ME'_R \end{aligned} \quad (2.71)$$

より核子静止系の変数が決まる。

$$E_R = \frac{s - M^2}{2M} \quad (2.72)$$

$$E'_R = \frac{M^2 - u}{2M} \quad (2.73)$$

$$\sin^2(\theta_R/2) = \frac{E_e E'_e}{E_R E'_R} \sin^2(\theta/2) \quad (2.74)$$

これらを用いて計算する。

MAID モデル (一つの π 生成反応)

MAID モデルは仮想光子と核子の散乱断面積計算であった。(A.40) 式より

$$\frac{d\sigma_{eN}}{dE'_R d\Omega_R} = \Gamma(\sigma_T + \epsilon\sigma_L) \quad (2.75)$$

ただし、

$$\Gamma = \frac{\alpha K}{2\pi^2(-t)} \frac{E'_R}{E_R} \frac{1}{1-\epsilon}, \quad K = \frac{W^2 - M^2}{2M}, \quad \epsilon = \left(1 - 2\frac{\omega_R^2 - t}{t} \tan^2 \frac{\theta_R}{2}\right)^{-1} \quad (2.76)$$

σ_T, σ_L は W, q^2 を代入して、[6] から与える。この式を用いて、電子原子核の共鳴生成反応断面積を計算する。(2.60) 式より

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{p_0} A \left(\frac{d\sigma_{eN}}{dE'_e d\Omega} \right) \quad (2.77)$$

上式の電子核子散乱断面積 ($d\sigma_{eN}/(dE'_e d\Omega)$) は実験室系の計算であるので、この部分を核子静止系へ置き換える。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_e d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'_e}{E_e} L_{\mu\nu} W_N^{\mu\nu} = \frac{E'_e}{E_e} \frac{E_R}{E'_R} \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'_R}{E_R} L_{\mu\nu} W_N^{\mu\nu} \\ &= \frac{E'_e}{E_e} \frac{E_R}{E'_R} \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_R d\Omega_R} \end{aligned} \quad (2.78)$$

これにより実験室系から核子静止系の電子核子散乱断面積へ置き換えることができた。ちなみに α, q^2 、 $L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$ はそれぞれローレンツ不変な変数である。

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{p_0} \frac{E'_e}{E_e} A \left(\frac{E_R}{E'_R} \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_R d\Omega_R} \right) \quad (2.79)$$

上式を用いて計算する。電子核子散乱断面積 ($d\sigma_{eN}/(dE'_R d\Omega_R)$) は (2.75) 式を用いる。

Paschos モデル (Δ 共鳴生成反応)

Paschos モデルの電子原子核散乱断面積の計算は準弾性散乱のように不変散乱振幅へ Δ 共鳴生成反応の散乱振幅を代入すれば計算できる。(2.62) 式より

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) A \frac{1}{64\pi^2} \frac{E'_e}{E_e} \frac{1}{p_0 p'_0} |\mathcal{M}_{eN}|^2 P_x(\mathbf{p}', p'_0) \quad (2.80)$$

2.1.2 で計算した散乱振幅で求まる。

$$P_x(\mathbf{p}', p'_0) = \frac{p'_0}{W} f_{BW}(W) \quad (2.81)$$

と変換でき、(2.80) 式より

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) A \frac{1}{64\pi^2} \frac{E'_e}{E_e} \frac{1}{p_0} |\mathcal{M}_{eN}|^2 \frac{f_{BW}(W)}{W} \quad (2.82)$$

W_1^N, W_2^N はローレンツ不変量 $f_{BW}(W)/W$ を加えた変数定義のため、

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) A \frac{1}{64\pi^2} \frac{E'_e}{E_e} \frac{1}{p_0} |\mathcal{M}_{eN}|^2 \quad (2.83)$$

ただし、散乱振幅 ($|\mathcal{M}_{eN}|^2$) は

$$|\mathcal{M}_{eN}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \cdot \sum_{i=1}^2 K_i W_i \cdot 4E_R^2$$
$$K_1 = \frac{-2t^2}{E_R^2}, \quad K_2 = 4 \left(1 + \frac{t}{4E_R^2} - \frac{\omega_R}{E_R} \right)$$

である。 W_1 、 W_2 の定義は 2.1.2 の Paschos モデルの節を参照。

第3章

原子核効果

この章では原子核効果について説明する。原子核効果として核子の束縛エネルギー運動量分布を用いる。束縛エネルギー運動量分布のモデルとして実験で測られたスペクトル関数 [3] を用いた。このスペクトル関数の比較モデルとしてフェルミガス模型を用いた。まず、フェルミガス模型について説明し、スペクトル関数について説明する。また準弾性散乱は散乱された核子の再散乱効果である終状態相互作用 [3] を用いるため、この終状態相互作用についても説明する。

3.1 原子核

原子核効果を説明する前に原子核について説明する。この節は [35] を参照した。

3.1.1 原子核の大きさ

核子が有限個集まって束縛状態を形成した孤立系が原子核である [35]。この系を記述するハミルトニアンは回転不変性及び空間反転不変性を満足するので、この量子系は角運動量 I 及びパリティ π の固有状態になっている。

原子核の内部を運動する核子の運動エネルギーは約 22MeV あり、原子核から一個の核子を分離するのに必要な分離エネルギーは $5 \sim 10\text{MeV}$ である。これらは核子自身の静止エネルギー ($M \cong 940\text{MeV}/c^2$) と比べて十分小さいので、通常、原子核は核子が比較的弱く結合した非相対論的量子力学系とみなせる。核子はスピン $1/2$ を持つフェルミ粒子であるので、低エネルギーの原子核において Pauli 原理がきわめて重要になる。

電子や陽子と原子核との散乱実験によって、原子核内の核子の密度分布 $\rho(r)$ が調べられる (r は原子核の重心から測った距離)。電子散乱では電磁相互作用により電荷分布 $\rho_c(r)$ 、陽子散乱では強い相互作用によって密度分布が調べられる。

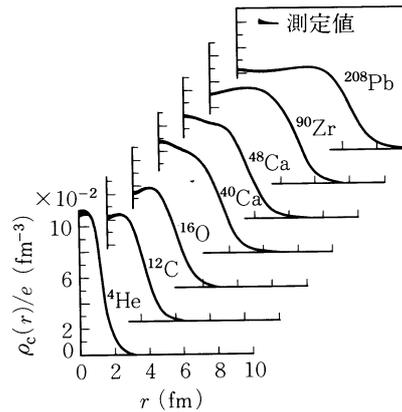


図 3.1 原子核の電荷分布 (測定値)。[35] を参照。

上の図は電荷分布の実験データである。実験から原子核の体積は構成核子の個数 A に比例すること、中心部の密度 $\rho(0)$ は A によらずほぼ一定値 $\rho(0) \approx 0.17 \text{ fm}^{-3}$ であること、表面の厚さ (密度が $\rho(0)$ の 90% から 10% に減少する距離) は $2 \sim 3 \text{ fm}$ であることが明らかになっている。これを密度の飽和性という。 A が小さい軽い核を除けば、表面の厚さが原子核全体の拡がりに比べて小さいので、 $\rho(r)$ が $\rho(0)$ の $1/2$ となる距離を核半径 R_0 とすると

$$R_0 = r_0 A^{1/3} \quad (\text{ただし } r_0 \cong 1.1 \text{ fm}) \quad (3.1)$$

という関係が良い近似で成り立っている。

基底状態 (最低エネルギー状態) の近傍にある原子核の中では、Pauli 原理により核子 - 核子衝突が抑制される。なぜなら、衝突後の状態が Pauli 原理で許されない場合、その衝突は起こらないからである。そのため核子の平均自由行程は核子半径より長くなる。したがって、核子 - 核子相互作用の効果を「他の核子が作る平均ポテンシャル中を独立粒子運動する核子」という描像で取り扱う平均場近似を導入することができる。

3.1.2 殻模型

原子核の構造の基本概念として殻模型を説明する。 Z (陽子数) または N (中性子数) が、2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 の原子核は (一核子あたりの) 結合エネルギーが大きく、特別な安定性を示す。これを魔法数と呼ぶ。魔法数の存在は原子核内の電子軌道の閉殻効果と類似している。そこで、原子の周期律の場合と同様に、原子核内の核子の運動にも平均ポテンシャルが成り立つと仮定し、閉殻の形成に伴う結合エネルギー増大によって魔法数を説明する試みをされた。しかし、どのような形の平均ポテンシャル $U(r)$ を用いても、実験をきれいに説明することはできなかった。1949年、Mayer と Jansen らは、平均ポテンシャルが強いスピン軌道相互作用を含むとすれば魔法数を説明できることを発見し、殻模型を提案した。

このモデルでの核子に対するシュレディンガー方程式は

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} + U(r) + U_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \right\} \psi_{nljm} = E_{nlj} \psi_{nljm} \quad (3.2)$$

で与えられる。 m は核子質量、 $U(r)$ は球対称とする。 $U(r)$ の動径座標 r への依存性は密度分布 $\rho(r)$ に対応すると考え、Woods-Saxon ポテンシャルがよく用いられる。

$$U(r) = U_0 f(r - R_0), \quad f(x) \equiv \{1 + \exp(x/a)\}^{-1} \quad (3.3)$$

U_0 はポテンシャルの深さ、 R_0 は原子核半径、 a は表面のぼやけを表す。(3.2) 式で軌道角運動量 l と固有スピン s の内積と運動量 p の間の角度に依存する力の存在を示している。核内での核子の運動方向は、媒質の密度変化の方向 $\nabla\rho(r)$ との相対的な関係のみが物理的意味を持つ。 $\nabla\rho(r)$ 、 p 、 s から作られるスカラー量は、 p の一次までの近似で

$$(\nabla\rho(r) \times p) \cdot s = (l \cdot s) \frac{1}{r} \frac{\partial\rho(r)}{\partial r} \quad (3.4)$$

である。ここで $\rho(r)$ と $U(r)$ が比例すると仮定すれば

$$U_{ls}(r) = U_{ls}^0 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r - R_0) \quad (3.5)$$

となる。固有値 E_{nlj} が近似的に実験を再現するよう決められたパラメータは、 $U_0 \cong -50\text{MeV}$ 、 $a = 0.5 \sim 0.7\text{fm}$ 、 $U_{ls}^0 \cong 30\text{MeV} \cdot \text{fm}^2/\hbar^2$ である。

(3.2) 式の固有関数は動径波動関数 $R_{nlj}(r)$ 、球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 、スピン波動関数 χ_{m_s} の積で、

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r) \sum_{m_l m_s} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle i^l Y_{l m_l}(\theta, \phi) \chi_{m_s} \quad (3.6)$$

と書ける。ここで $\langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle$ はクレプッシュゴルダン係数である。(3.6) 式を j-j 結合の波動関数という。

簡単のため $U(r)$ を調和振動子ポテンシャル

$$U_{HO}(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (r^2 - R_0^2) \quad (3.7)$$

で置き換えると、 $U_{ls}(r)$ は負の定数 C_{ls} となり、(定数 $-\frac{1}{2}\omega_0^2 R_0^2$ を別にして) 固有エネルギーは

$$E_{nlj} = \hbar\omega_0 \left(N + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} C_{ls} \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \quad (3.8)$$

で与えられる。ここで $N = n_x + n_y + n_z$ (n_x, n_y, n_z は x, y, z 方向の振動量子数) である。強いスピン軌道結合のため、 $l \neq 0$ のとき $j = l + \frac{1}{2}$ と $j = l - \frac{1}{2}$ の軌道の間大きいエネルギー差 $\Delta E_{ls} = (l+1/2) |C_{ls}|$ が生じる。現実の平均ポテンシャルは $U_{HO}(r)$ と比較して表面付近でより引力的なので、一般的に、(表面で確率密度の高い) 大きい l をもつ順位のエネルギーは同じ N の準位群のなかで低くなる。

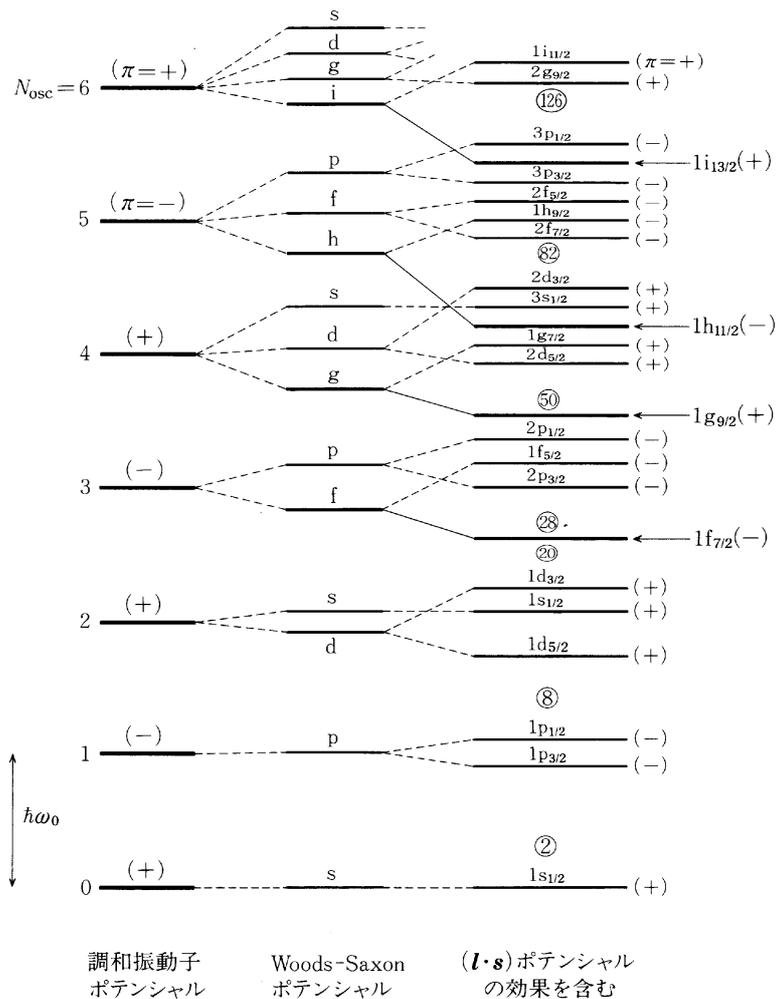


図 3.2 殻模型の 1 粒子エネルギー準位 (概念図)。Woods-Saxon ポテンシャルに $(l \cdot s)$ 項がつけ加わって、魔法数 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 が得られる。記号 s, p, d, f, g, h, i は $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ を表す。これらの準位を下から詰めたときの核子の累計数は、各準位の縮退度 $2j + 1$ から計算できる。[35] を参照。

固有値スペクトルは図 3.2 のようになる。

3.2 原子核内の核子の運動量分布

原子核内の束縛エネルギーと運動量の相関を考慮した核子の束縛エネルギー運動量分布 (スペクトル関数) について説明する。まず、比較するモデルとして元来用いられていたフェルミガス模型について説明する。

3.2.1 フェルミガス模型

計算に用いるスペクトル関数と比較するフェルミガス模型について説明する。原子核内における作用を無視して、原子核を核子の自由なフェルミ粒子の集まりとして取り扱うモデルをフェルミガス粒子と呼ぶ。今回は核子 (陽子と中性子) が平均ポテンシャルの中のエネルギー準位を下から占めているという描像を

説明する。この場合、核子は体積 V の中にポテンシャルによって閉じ込められ、最大運動量 p_F まで準位を占めている。この最大運動量をフェルミ運動量、そのエネルギーをフェルミエネルギーと呼ぶ。運動量空間で、半径 p_F の球面をつくり、その表面をフェルミ面と呼ぶ。今回は陽子のクーロン力の効果は無視し、陽子と中性子を同じポテンシャル、束縛エネルギーの核子として扱う。また中性子数 N と陽子 Z 数が等しい原子核を取り扱うので、 $A/2 = N = Z$ とする

一辺 L の立方体 ($V = L^3$) に閉じ込められた二つのスピン状態の核子の波動関数は

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \cdot \chi_s \tag{3.9}$$

となる。ただし、 \mathbf{p} は運動量、 χ_s はスピン波動関数である。周期境界条件より

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L}n_x, \quad p_y = \frac{2\pi\hbar}{L}n_y, \quad p_z = \frac{2\pi\hbar}{L}n_z \quad (n_x, n_y, n_z = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \dots) \tag{3.10}$$

となり、スピンの縮退数を考慮すると、

$$d^3\mathbf{n} = 2 \cdot \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 d^3\mathbf{p} \tag{3.11}$$

となるので、 p_F まで積分すると

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} = Z = N &= \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{p_F^3}{3} V \\ p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 A}{2V}\right)^{1/3} &= \hbar \left(\frac{3\pi^2 \rho}{2}\right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}/c \quad (\rho(0) \approx 0.17 \text{ fm}^{-3}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

フェルミエネルギーは

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV} \tag{3.13}$$

である。

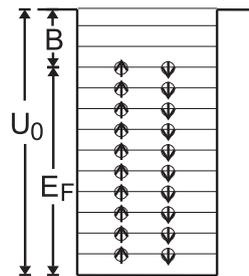


図 3.3 陽子のクーロン力は考慮していないため、核子のフェルミ準位を示している。

核子のフェルミ準位は上の図である。 U_0 は平均ポテンシャルの深さ、 B は分離エネルギーである。

フェルミ模型における原子核の運動量分布は (2.52) 式により求まる。(2.52) 式より

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_R |\langle 0|\mathcal{R}, -\mathbf{p}|N, \mathbf{p}\rangle|^2 \delta(E - M + E_0 - E_R) \tag{3.14}$$

$$\int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) = 1 \tag{3.15}$$

$$\int d^3\mathbf{p} n(\mathbf{p}) = 1 \tag{3.16}$$

Pauli 原理、束縛エネルギー一定より

$$P(\mathbf{p}, E) = n \theta(p_F - |\mathbf{p}|) \delta(E + p_0 - M - E_B) \quad (3.17)$$

$$P_x(\mathbf{p}', p'_0) = \theta(|\mathbf{p}'| - p_F) \delta(p'_0 - \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + M^2}) \quad (3.18)$$

ただし、 $n = 3/(4\pi p_F^3)$ は核子密度である。フェルミエネルギーと束縛エネルギーは実験で測られ、 ^{12}C 、 ^{16}O は束縛エネルギー $E_B = 25\text{MeV}$ 、フェルミ運動量 $p_F = 221\text{MeV}/c$ である。この値を用い、フェルミガス模型の電子原子核散乱断面積を計算する。

3.2.2 スペクトル関数

実験で測られたスペクトル関数について説明する。実験は核子が原子核から出る (核子ロックアウト) 電子原子核散乱実験 ($e, e'p$) である。スペクトル関数について理論的に説明し、実験について説明する。

局所密度近似 (LDA)

実験で測られたスペクトル関数を理論的に説明している局所密度近似 (LDA) について説明する。詳細については [3, 10] を参照。

今まで原子核内のポテンシャルは平均場近似 (殻模型) で記述されていた。平均場近似は 3.1.2 において説明した Woods-Saxon ポテンシャルに対応している。平均場近似は Pauli 原理より、フェルミ運動量を超えると収束してしまう。フェルミ運動量を超える核子は他の核子と相関し、平均場近似で計算できない。フェルミ運動量、フェルミエネルギーより大きい範囲での核子同士の相関寄与 (核子 - 核子短距離力の効果) を示すスペクトル関数を $P_{corr}(\mathbf{p}, E)$ とすると、

$$P_{LDA}(\mathbf{p}, E) = P_{MF}(\mathbf{p}, E) + P_{corr}(\mathbf{p}, E) \quad (3.19)$$

となる。ただし、 $P_{MF}(\mathbf{p}, E)$ は平均場近似によるスペクトル関数、 $P_{LDA}(\mathbf{p}, E)$ は局所密度近似 (LDA) によるスペクトル関数である。LDA によるスペクトル関数は

$$\int d^3\mathbf{p} dE P_{LDA}(\mathbf{p}, E) = 1 \quad (3.20)$$

と規格化している。

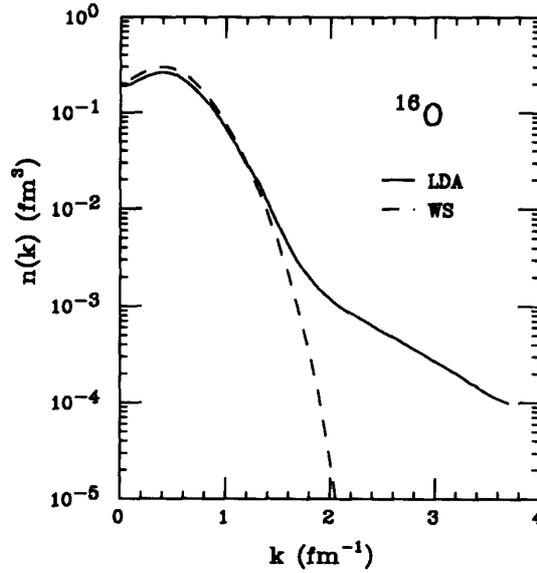


図 3.4 LDA と平均場近似 (Woods-Saxon 型) を比較した図。横軸は波数 (fm^{-1})、縦軸は原子核 (^{16}O) の核子密度 (fm^3) である。[10] を参照した。

図 3.4 をみると、平均場近似の分布が収束しても、LDA は高エネルギー k でまだ分布している。これは核子 - 核子間の短距離力の効果 (P_{corr}) である。またスペクトル関数は束縛エネルギーと相関もあり、

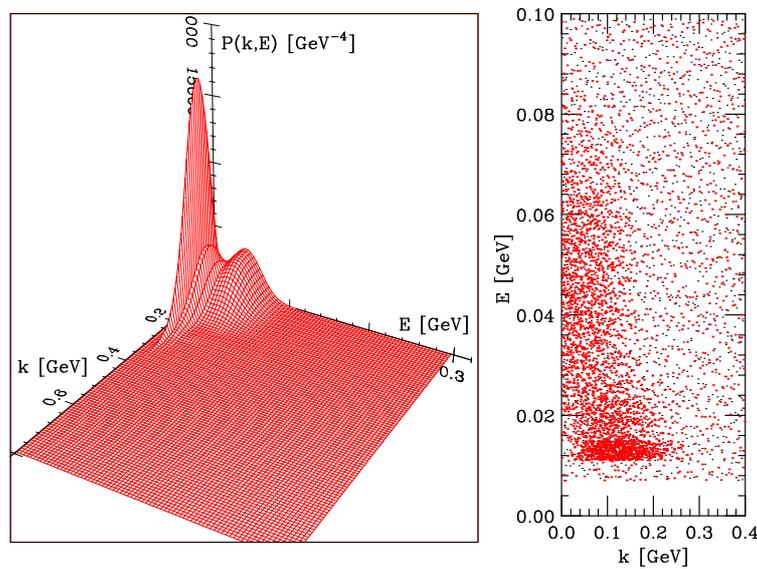


図 3.5 スペクトル関数 $P(p, E)$ の三次元プロットである。 k が運動量 (GeV)、 E が束縛エネルギー (GeV) を表している。[3] を参照した。

上の図のように示される。スペクトル関数の殻模型の寄与 $P_{MF}(p, E)$ が約 80% で、残りの約 20% の寄与が高エネルギー運動量 ($|p| \gg p_F$) と大きい束縛エネルギー ($E \gg e_F$) による核子の寄与 $P_{corr}(p, E)$ である。次にスペクトル関数の測定実験について説明する。

JLab 実験

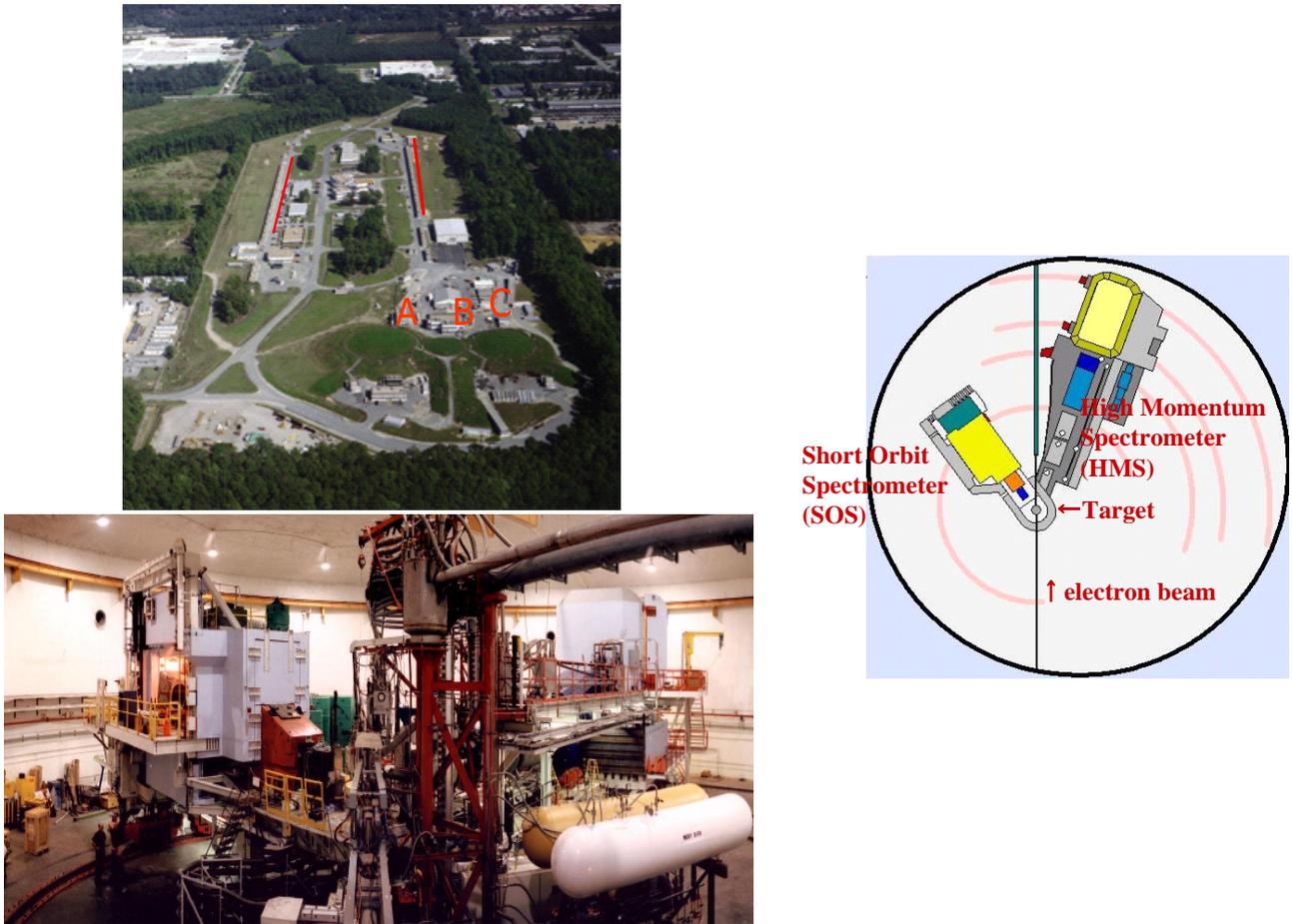


図 3.6 左上の図はアメリカのバージニア州にある Jefferson 実験室 (JLab) である。直線部分で電子が加速され、A、B、C の箇所 (ホール) で実験する。左下の図が C ホールの中の様子である。右の図が検出器の配置である。

上の図は Jefferson 実験室の図である。スペクトル関数は Jefferson 実験室で測定された。図 3.6 の右の図について説明する。これは加速された電子ビーム (electron beam) がターゲットと散乱し、散乱後の電子ビームは HMS(High Momentum Spectrometer) で検出され、陽子は SOS(Short Orbit Spectrometer) で検出される概略図を示している。入射電子エネルギーは 3.2GeV である。

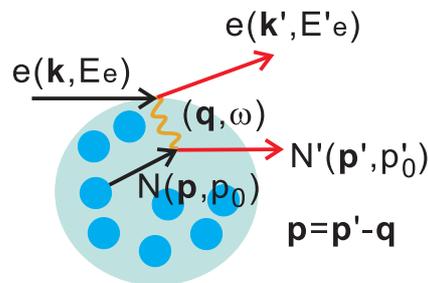


図 3.7 電子原子核散乱 ($e,e'p$) の同時測定実験による運動学

図 3.7 は実験の運動学である。電子散乱により核子が原子核から出てくるので、電子と核子を同時計測す

ることで始状態の核子の運動量 p を測定する。束縛エネルギーは質量損失エネルギーより、

$$E = E_e - E'_e - T_{p'} - T_{A-1} \quad (3.21)$$

を計算することで求まる。ただし、 $T_{p'}$ は散乱後の核子の運動量エネルギー、 T_{A-1} は散乱後の残った原子核 ((A-1) の核子による原子核) の運動量エネルギーである。 T_{A-1} については非常に小さいため無視する。考慮する散乱断面積は [15] より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{e'} d\Omega_{p'} dE'_e dp'_0} = \frac{d\sigma_{eN}}{d\Omega_{e'}} \cdot p'_0 |p'| \cdot P(p, E) \cdot T_A \quad (3.22)$$

と求まる。これによりスペクトル関数 $P(p, E)$ が測定される。ただし、 T_A は原子核の透過性である。 T_A については終状態相互作用で説明する。

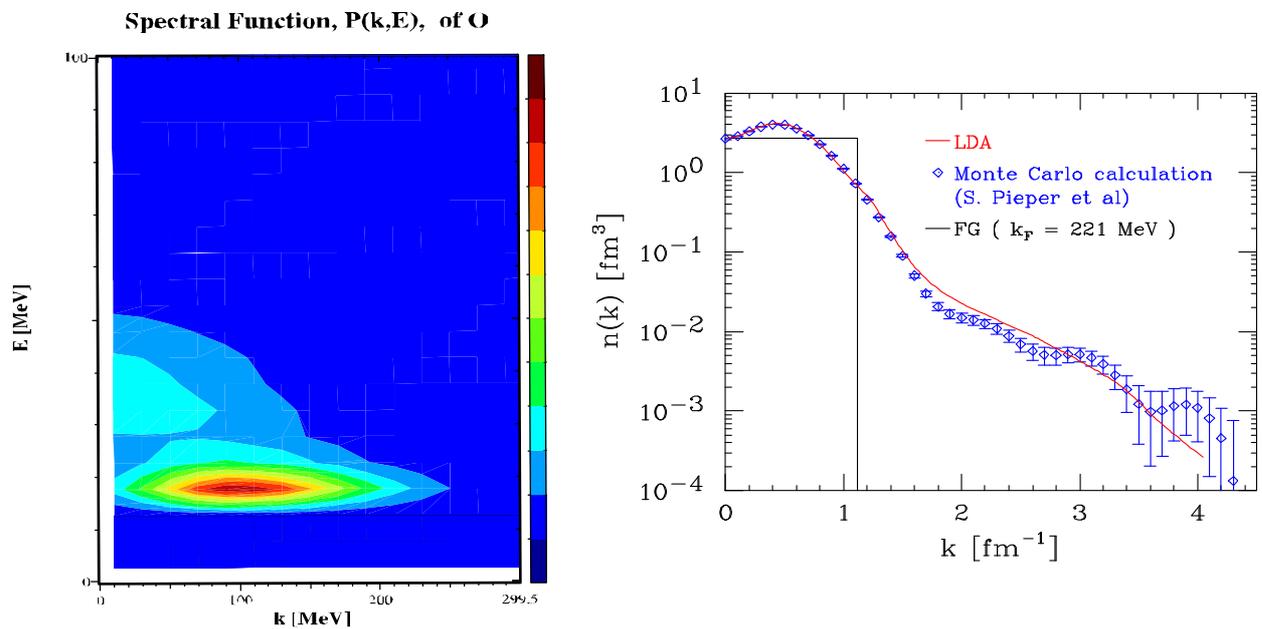


図 3.8 左の図はスペクトル関数である (測定値)。縦軸は束縛エネルギー ($E(\text{MeV})$)、横軸は運動量 (MeV/c)、色はスペクトル関数の強度である。青になるほど少なく、赤になるほど多く分布している。右の図は核子密度分布である。赤の直線が LDA (スペクトル関数の計算)、ダイヤモンドが実験値に基づいたモンテカルロシミュレーション、黒の直線が運動量一様のフェルミガス模型である。[3] を参照した。

図 3.8 はスペクトル関数の測定結果である。(2.52) 式より

$$P(\mathbf{p}, E) = \sum_R |\langle 0 | \mathcal{R}, -\mathbf{p} \rangle | N, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta(E - M + E_0 - E_R) \quad (3.23)$$

$$\int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) = 1 \quad (3.24)$$

上の式に実験データを代入し、スペクトル関数による電子原子核散乱断面積を計算する。

3.3 終状態相互作用

終状態相互作用とは散乱された核子が再び原子核内の核子と再散乱する効果である。この終状態相互作用について説明する。

電子原子核散乱実験において、電子のみを測る実験 (e,e')、電子と核子を同時に計測する実験 (e,e'p) がある。その二つの実験を比較すると、電子と核子を同時計測する実験の事象数が明らかに少なかった。この事実により終状態相互作用が考えられた。低い q^2 で顕著に現れ、準弾性散乱断面積の高エネルギー領域が延びる。終状態相互作用は二つの効果を持っている。

- 散乱後の核子が他の核子との相互作用により散乱断面積のピークが低いエネルギーへ移動する。
- ピークが抑えられ、高エネルギーの領域へ分布が広がる。

終状態相互作用は Glauber 理論に関係した近似を使っているので、Glauber 理論を説明した後、今回用いた終状態相互作用について説明する。

アイコーナル近似

質量 m の粒子のポテンシャル V による散乱を考える。入射エネルギー E が十分大きく幾何光学が成り立ち、かつ粒子の軌道が直線で近似できるとする。そのためには V による運動量変化 (力 \times 時間 $\approx (V/a)(a/v)$) が運動量の不確定性 \hbar/a より十分大きく、入射運動量 $\hbar k$ より十分小さくなければならない。ここで a は力の働く領域の長さを、 v は粒子の速度を表す。これより

$$\frac{Va}{\hbar v} = \frac{V}{2E}(ka) \gg 1, \quad \frac{V}{v\hbar k} = \frac{V}{2E} \ll 1 \quad (3.25)$$

上の式の条件を必要とする。

直線近似の軌道の方向を z 方向とすると、 V を通過する平面波の位相の変化は

$$\Delta\phi = \int_{-\infty}^z (\sqrt{k^2 - U} - k) dz = \int_{-\infty}^z \Phi dz \quad (3.26)$$

となる。ここで、

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad U = \frac{2mV}{\hbar^2} \quad (3.27)$$

と置いた。運動量移行を $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ と書くと、散乱の T 行列は

$$T = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} U e^{i\Delta\Phi} \quad (3.28)$$

と表される。 $\mathbf{r} = (\mathbf{b}, z)$ と書き、運動量移行 \mathbf{q} が入射方向にほぼ垂直として

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \approx \mathbf{q} \cdot \mathbf{b} \quad (3.29)$$

と近似する。条件 $V/(2E) \ll 1$ より

$$\Phi = \sqrt{k^2 - U} - k \approx -\frac{U}{2k} = -\frac{V}{\hbar v} \quad (3.30)$$

と近似できるので

$$T = -\frac{\hbar^2 k}{m} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \Phi \exp\left(i \int_{-\infty}^z \Phi dz'\right) \quad (3.31)$$

となる。ここで z に関する積分が実行できて

$$T = \frac{i\hbar^2 k}{m} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} (e^{i\chi(\mathbf{b})} - 1) \quad (3.32)$$

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi dz = -\frac{1}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} V dz \quad (3.33)$$

が得られる。 $\chi(\mathbf{b})$ は位相差関数と呼ばれる。散乱振幅 $f(\mathbf{q})$ は

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} (1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}) \quad (3.34)$$

この近似をアイコーナル近似と呼ぶ。

Glauber 理論

アイコーナル近似を多体系に拡張する。簡単のため、入射粒子は構造のない一粒子とし、その座標を $\mathbf{r} = (\mathbf{b}, z)$ で表す。一方、標的核は A 個の核子からなり、各核子の座標を $\mathbf{r}_i = (\mathbf{b}_i, z_i)$ で表す。相互作用は二体力の和は

$$V = \sum_i V_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.35)$$

で書ける。このとき、位相差関数は

$$\chi(\mathbf{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{k^2 - \sum_i U_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)} \right) dz \quad (3.36)$$

で与えられ、近似 (3.30) 式を用いると、

$$\chi(\mathbf{b}) = \sum_i \chi_i(\mathbf{b} - \mathbf{b}_i) \quad (3.37)$$

$$\chi_i(\mathbf{b} - \mathbf{b}_i) = -\frac{1}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} V_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dz \quad (3.38)$$

を得る。そこで散乱振幅は

$$\hat{f}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} (1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left(1 - \prod_i (1 - \Gamma_i) \right) \quad (3.39)$$

と書ける。ここで Γ_i は $\mathbf{b} - \mathbf{b}_i$ の関数で

$$\Gamma_i = 1 - e^{i\chi_i(\mathbf{b} - \mathbf{b}_i)} \quad (3.40)$$

であり、プロファイル関数と呼ばれる。

\hat{f} は \mathbf{b}_i の関数であって、標的核に対する演算子である。散乱振幅は \hat{f} の始状態 Φ_0 と終状態 Φ_n の行列要素

$$F_{n0}(\mathbf{q}) = \langle \Phi_n | \hat{f}(\mathbf{q}) | \Phi_0 \rangle = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \langle \Phi_n | 1 - \prod_i (1 - \Gamma_i) | \Phi_0 \rangle \quad (3.41)$$

によって与えられる。ここで $1 - \prod_i (1 - \Gamma_i)$ を Γ_i について展開すると

$$1 - \prod_i (1 - \Gamma_i) = \sum_i \Gamma_i - \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j + \dots - (-1)^A \prod_i \Gamma_i \quad (3.42)$$

となる。第一項が一回散乱、第二項が二回散乱、最後の項が A 回散乱のように、多重散乱過程が有限の和で書かれるのが Glauber 理論の特徴である。

CGA

準弾性散乱断面積に用いた終状態相互作用は CGA を用いた。これは Glauber 理論を拡張した計算である。この節は CGA について説明する。詳細は [3, 11] を参照。

終状態相互作用は Glauber 理論の仮定を用いる。

- 散乱後の核子は直線軌道を一定速で進む。
- (A-1) の核子による原子核は散乱される核子と比べると、ほぼ静止した状態である。

この仮定の下、原子核内の散乱された核子の伝播の予測値は次のように形式化する。

$$U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(t) = U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0(t)\bar{U}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{FSI}(t) \quad (3.43)$$

ただし、 $U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0$ は自由空間での伝播、 $\bar{U}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{FSI}(t)$ は終状態相互作用の効果である。終状態相互作用の効果は次の量で定義される。 $(R \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A))$ は原子核の形状を示す)

$$\bar{U}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{FSI}(t) = \langle 0 | U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{FSI}(R; t) | 0 \rangle \quad (3.44)$$

$$U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{FSI}(R; t) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A e^{\sum_{j \neq i} \int_0^t dt' w_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(|\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}t'|)} \quad (3.45)$$

ただし、 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 、 $w_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(|\mathbf{r}|)$ は始状態の運動量 $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ での核子 - 核子散乱を示す。大きな運動量移行 \mathbf{q} では、 $\mathbf{p} + \mathbf{q} \approx \mathbf{q}$ となり、(3.44) 式は t と \mathbf{q} の関数になる。また $U_{\mathbf{q}}^{FSI}$ は原子核透過性を示す T_A と関係し、

$$T_A = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle | | U_{\mathbf{q}}^{FSI}(R; t) |^2 | \rangle \quad (3.46)$$

となる。インパルス近似の計算では終状態相互作用が含まれていなかった。次の式により終状態相互作用を含めた電子原子核散乱断面積を定義する。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\omega} = \int d\omega' f_{\mathbf{q}}(\omega - \omega') \left(\frac{d\sigma}{d\Omega d\omega'} \right)_{IA} \quad (3.47)$$

ただし、フォールディング関数と呼ばれる $f_{\mathbf{q}}(\omega)$ は

$$f_{\mathbf{q}}(\omega) = \delta(\omega) \sqrt{T_A} + \int \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} [U_{\mathbf{q}}^{FSI}(t) - \sqrt{T_A}] \quad (3.48)$$

である。

次に原子核の透過性 T_A について説明する。[13, 14] の実験で測定されている。 T_A は原子核内で散乱された核子が外へ出てくる割合を示しており、 $T_A = 1$ のときは散乱された核子を全く透過する状態である。 T_A は 1 より低い値を持つとき、原子核内で散乱された核子が吸収されるか、運動量に変化している。

測定方法はインパルス近似で予測した事象数と実際に測定された事象数の比を取ることで測定される。実験方法はスペクトル関数での Jefferson 実験と同じである。

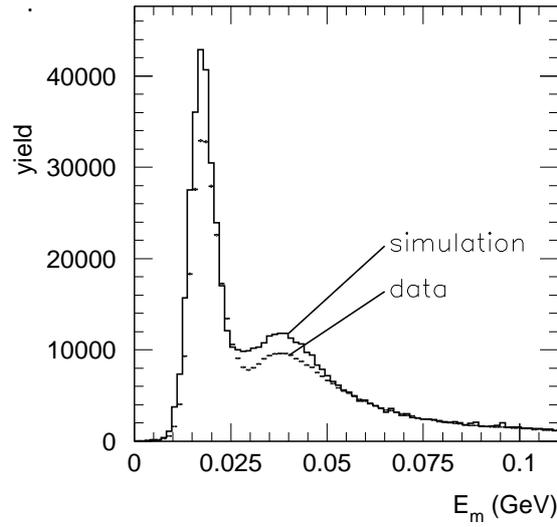


図 3.9 実験データとインパルス近似予測値の比較した図。直線が予測値で、点の実験データである。[13] を参照。

図 3.9 の予測値と実験値を比較することにより

$$T_A(q^2) = \frac{\int_V dp dE N^{exp}(E, \mathbf{p})}{\int_V dp dE N^{sim}(E, \mathbf{p})} \quad (3.49)$$

T_A が求まる。

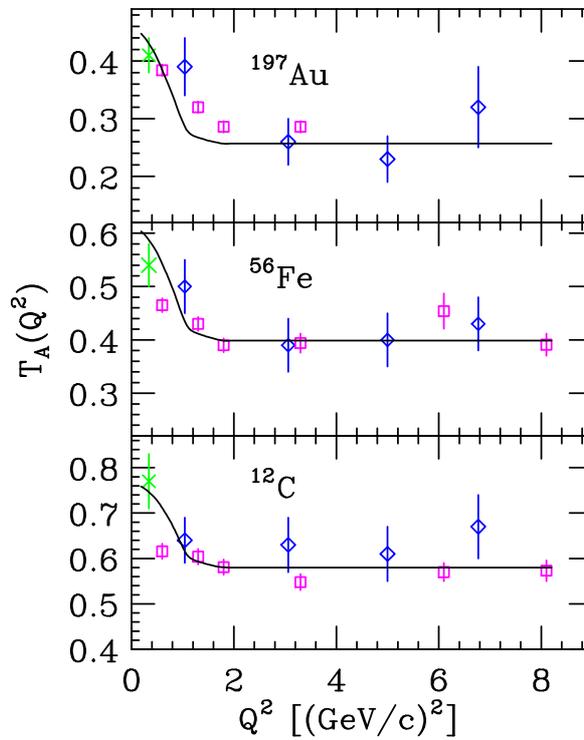


図 3.10 炭素、鉄、金の透過性 T_A の Q^2 による分布 Q^2 点は実験データ、直線は計算 (3.46) 式である。[3] を参照。

この終状態相互作用を用い、準弾性散乱断面積を計算する。

第 4 章

計算結果と考察

電子原子核散乱断面積を計算する際、束縛エネルギーを運動学に考慮する計算モデルが問題になった。エネルギー保存のモデルを三つ考慮したが、今回計算したモデルを採用した。私が行ったエネルギー保存の違いを示した結果は付録 C で説明する。今回用いたエネルギー保存のモデルで、電子原子核散乱断面積を計算する。原子核効果を示した結果は付録 D で示す。

4.1 計算結果

まず原子核効果のない電子核子散乱断面積の計算結果を説明し、電子原子核散乱断面積の計算結果を説明する。

4.1.1 電子核子散乱断面積計算結果

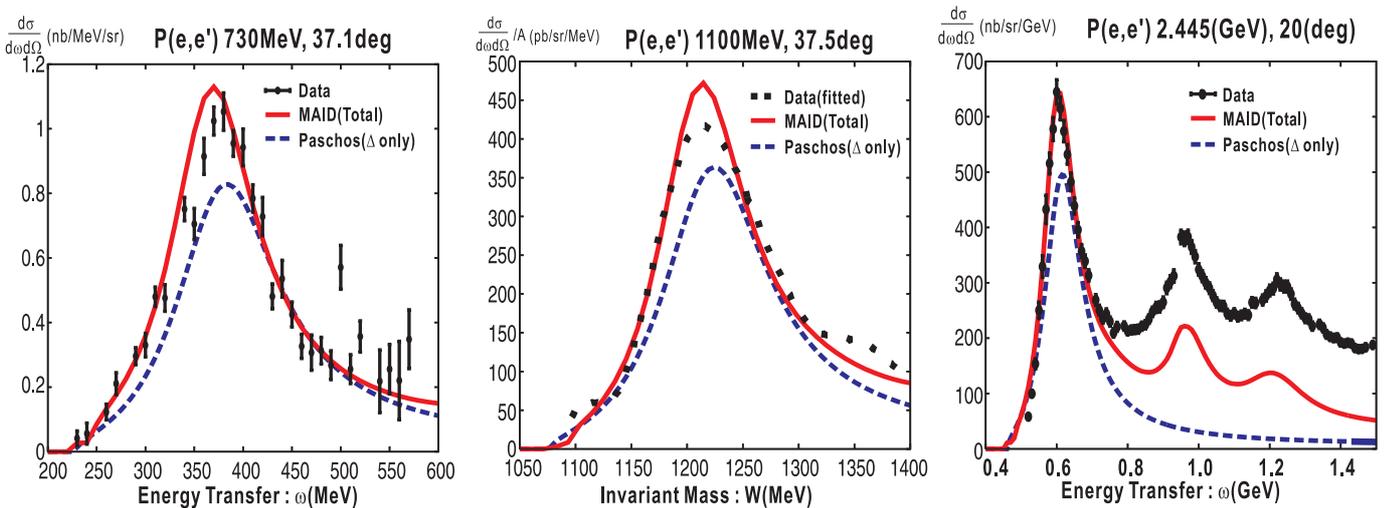


図 4.1 電子核子散乱 (共鳴生成反応) の計算結果とデータの比較。入射エネルギー E_e 、散乱角 θ は、左から $E_e = 730\text{MeV}$ 、 $\theta = 37.1$ 度、 $E_e = 1100\text{MeV}$ 、 $\theta = 37.5$ 度、 $E_e = 2.445\text{GeV}$ 、 $\theta = 20$ 度。縦軸は散乱断面積で左から $\text{nb}/(\text{MeVsr})$ 、 $1/A \cdot \text{pb}/(\text{MeVsr})$ 、 $\text{nb}/(\text{GeVsr})$ 、ただし、核子なので $A = 1$ である。横軸は左からエネルギー移行 $\omega(\text{MeV})$ 、散乱後の核子質量 (不変質量) $W(\text{MeV})$ 、エネルギー移行 $\omega(\text{GeV})$ である。点は実験データ、ただし、真ん中の図の点線はフィッティングによるデータ、直線は MAID モデル (一つの を生成する反応)、破線は Paschos モデル (Δ only) である。実験データはそれぞれ左から [16][17][18] を参照した。

図 4.1 は電子核子散乱断面積の計算と実験データを比較した図である。MAID モデル (一つの 生成反応) は 2.1.2 の MAID モデルの節を、Paschos モデル (Δ only) は 2.1.2 の Paschos モデルの節を参照。図 4.1 より MAID モデルは精度よく電子核子散乱断面積を計算することがわかる。2.445GeV のデータにおいて、実験データと計算が合わない領域が出てくるが、これは一つの 生成以外の反応 (深非弾性散乱) による寄与である。

500MeV ~ 1GeV の領域として、730MeV と 1100MeV のデータを考える。この領域では Δ 共鳴生成反応 (Paschos モデル) が主に占めている。図 4.1 より Paschos モデルと MAID モデルの差が非共鳴反応による寄与であることがわかる。これにより 500MeV ~ 1GeV 領域では Δ 共鳴生成反応と非共鳴反応で計算できることがわかる。

4.1.2 電子原子核散乱断面積計算結果

最終結果

電子核子散乱断面積の計算モデルに原子核効果を加え、電子原子核散乱断面積を計算した。

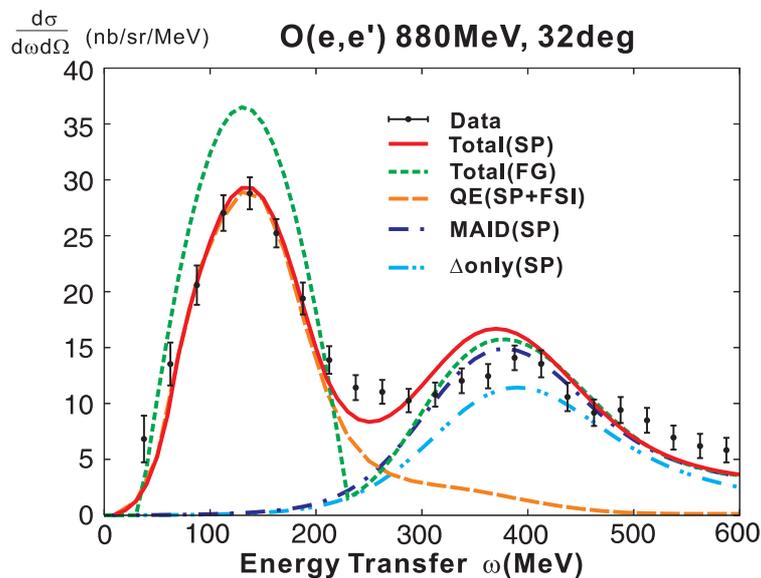


図 4.2 電子原子核 (^{16}O) 散乱断面積の計算と実験データの比較した図。 $E_e = 880\text{MeV}$ 、 $\theta = 32$ 度、点は実験データ、直線はスペクトル関数での準弾性散乱 (終状態相互作用を含む)+MAID モデル、短い破線はフェルミガス模型での準弾性散乱 +MAID モデル、長い破線はスペクトル関数での準弾性散乱 (終状態相互作用を含む)、一点鎖線はスペクトル関数での MAID モデル、二点鎖線はスペクトル関数での Paschos モデル (Δ only)。実験データは [20] を参照した。

図 4.2 は電子原子核散乱断面積の計算結果である。この図はスペクトル関数とフェルミガス模型を比較し、スペクトル関数による電子原子核散乱断面積の計算の寄与を分解して示している。図 4.2 より準弾性散乱断面積のピークにおいて、スペクトル関数の精度はフェルミガス模型より精度よく計算できることがわかる。フェルミガス模型では核子がフェルミ運動量より大きい値をもつことができないので、準弾性散乱断面積の寄与がすぐなくなる。しかし、スペクトル関数では核子がフェルミ運動量より大きい値を持つことができるため、スペクトル関数による準弾性散乱断面積はフェルミガス模型による準弾性散乱断面積より高エネルギーの領域で広がっている。共鳴領域において、図 4.2 よりスペクトル関数による MAID モデルは実験データと精度よく合っている。非共鳴反応の寄与は MAID モデルと Paschos モデルの差で

ある。これらにより準弾性散乱領域と共鳴生成反応領域との境界領域における散乱断面積は、スペクトル関数による核子の高エネルギー運動量の効果 + Δ 共鳴生成反応 + 非共鳴反応で計算できることがわかった。このように系統的に調べた計算は、世界で初めてである。以下に $500\text{MeV} \sim 1\text{GeV}$ 領域での電子原子核散乱の計算結果を示す。

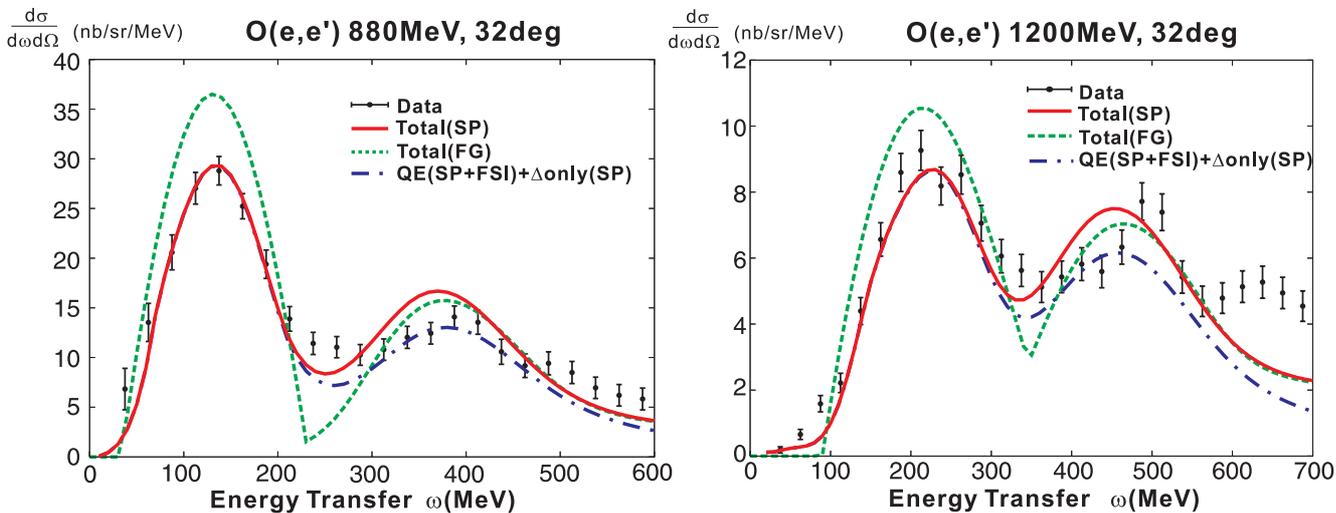


図 4.3 電子原子核 (^{16}O) 散乱断面積計算結果。左の図から $E_e = 880\text{MeV}, \theta = 32$ 度、 $E_e = 1200\text{MeV}, \theta = 32$ 度である。点は実験データ、直線はスペクトル関数での準弾性散乱 (終状態相互作用を含む)+MAID モデル、破線はフェルミガス模型での準弾性散乱 +MAID モデル、一点破線はスペクトル関数での準弾性散乱 (終状態相互作用を含む)+Paschos モデル (Δ only)。実験データは [20] を参照した。

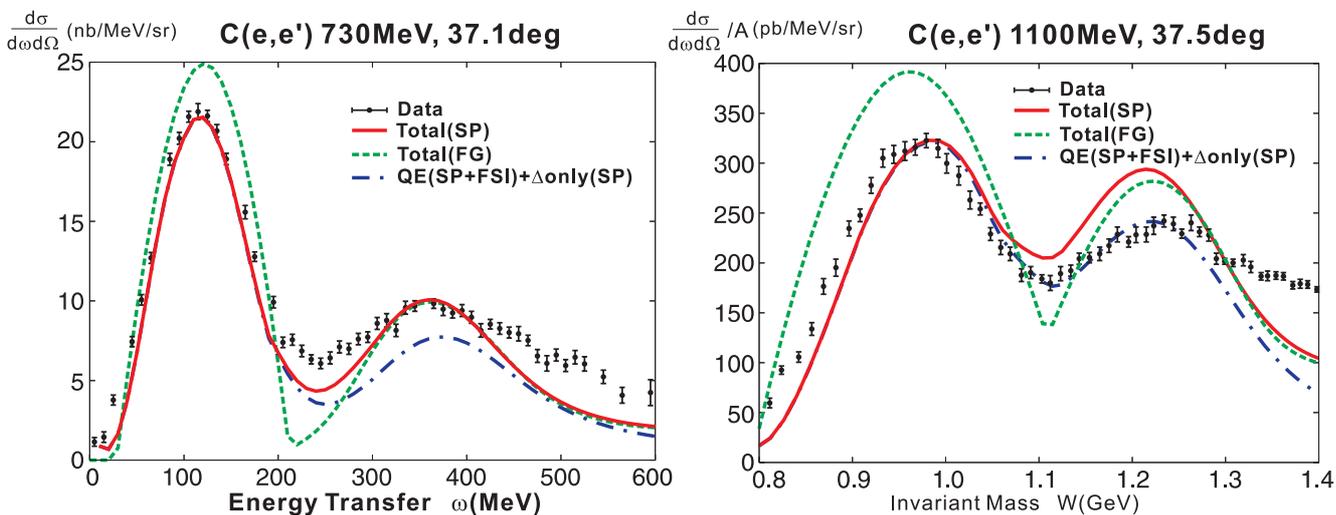


図 4.4 電子原子核 (^{12}C) 散乱断面積計算結果。左から $E_e = 730\text{MeV}, \theta = 37.1$ 度、 $E_e = 1100\text{MeV}, \theta = 37.5$ 度。線については図 4.3 と同様。実験データは左から [16][17] を参照した。

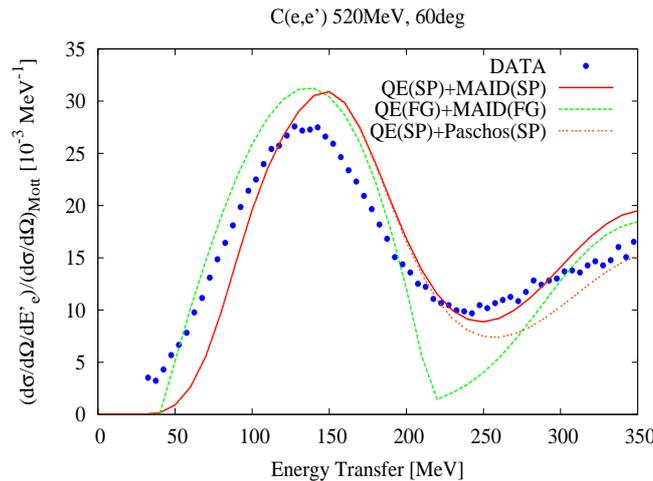


図 4.5 電子原子核 (^{12}C) 散乱断面積の計算結果 (520 MeV, 60 度)。点が実験データで、直線がスペクトル関数での準弾性散乱 + MAID モデル、破線がフェルミガス模型での準弾性散乱 + MAID モデル、点線がスペクトル関数での準弾性散乱 + Paschos モデルである。実験データは [19] を参照した。

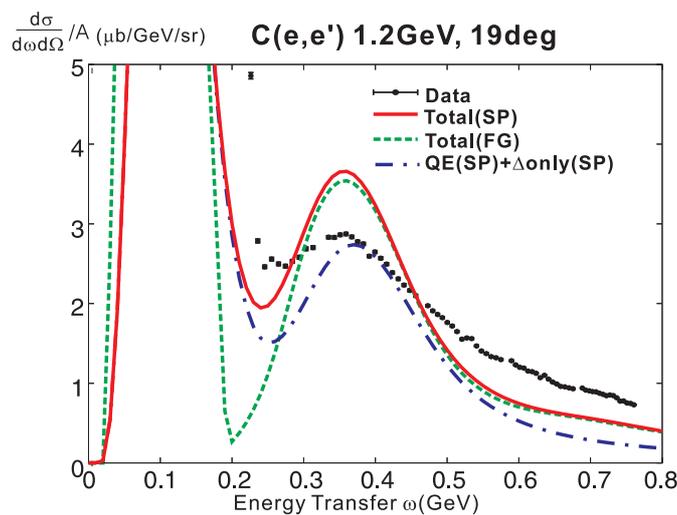


図 4.6 電子原子核 (^{12}C) 散乱断面積の計算結果。 $E_e = 1.2\text{ GeV}$, $\theta = 19$ 度。線については図 4.3 と同様。実験データは [21] を参照した。

今までのデータは、 $Q^2 > 0.2(\text{GeV}^2/c^2)$ であった。 $Q^2 < 0.2(\text{GeV}^2/c^2)$ では、パウリ禁止則が大きく効く事が知られている [4]。世界に唯一存在するデータは JLAB E04-001 実験である。この実験は、2005 年に、作田、他の提案により収集されたデータであり、現在、解析中である (「吉澤忠尚 物理学会 発表講演 2005 年春」)。今後の結果が期待される。

図 4.6 は $Q^2 < 0.2(\text{GeV}^2/c^2)$ による前方散乱の計算結果である。ニュートリノ散乱の場合、前方散乱が多いため、今後、Pauli 禁止則を考慮し、前方散乱での計算精度を上げる必要がある。

4.2 考察

この研究の目的は 500 MeV ~ 1 GeV 領域での電子原子核散乱による準弾性散乱断面積及び共鳴生成反応での精度の良いモデルを得ることと電子原子核散乱断面積を定量化することであった。最初は原子核効

果のない電子核子散乱断面積を調べた。生成反応において、MAID モデルと Paschos モデルを併用し、計算した結果 (図 4.1)、 Δ 共鳴生成反応のみでなく、非共鳴の寄与があることがわかった。この計算モデルに原子核効果 (スペクトル関数、終状態相互作用) を加えて、電子原子核散乱断面積を計算した。

準弾性散乱領域において、フェルミガス模型では合わず、スペクトル関数で合うことは [3] で理解されていた。計算結果 (図 4.2) から準弾性散乱領域はスペクトル関数で実験データと良く合っていることが確認できた。また境界領域と共鳴領域においても計算結果 (図 4.2) よりスペクトル関数はフェルミガス模型より実験データと精度よく合うことがわかった。そして、境界領域ではスペクトル関数による高エネルギー運動量の核子の効果 + Δ 共鳴生成反応 + 非共鳴で埋まることがわかった。これらにより電子原子核散乱を定量的に説明することができた。

しかし、電子原子核散乱では共鳴領域において、エネルギー保存のモデルにより大きく違いが出てしまう (図 C.4)。そのため、このエネルギー保存のモデルの違いを物理的に説明する必要性がある。さらに、ニュートリノ原子核散乱は前方散乱が多いので、前方散乱 (図 4.6) の計算の精度の向上が必要となる。また生成反応を各共鳴生成反応、非共鳴反応で別々に計算し、定量化かつ計算精度を向上しなければならない。計算精度の向上、生成の定量化によりニュートリノ原子核散乱断面積のベクトル型を精度よく計算することができる。

現在、ほとんどのニュートリノ実験では、原子核効果はフェルミガス模型を使っていた。我々のグループ「Benhar, 他」の特徴であるスペクトル関数は、一連の仕事 [1, 2, 3] で、世界にも広く使われるようになってきた。

付録 A

散乱断面積の計算

以下の説明は [31][32][33] の教科書を参照している。

A.1 散乱断面積

A.1.1 散乱断面積の定義

二体散乱 ($A + B \rightarrow C + D$) での散乱断面積を説明する。

V の体積内の自由粒子の波動関数

$$\begin{aligned}\phi &= N e^{-ipx} && (\text{クライン - ゴルダン方程式に従う粒子 (ボゾン)}) \\ \psi &= N u(p) e^{-ipx} && (\text{ディラック方程式に従う粒子 (フェルミオン)})\end{aligned}\tag{A.1}$$

(ただし、 $px = E \cdot t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ 、 $N = 1/\sqrt{V}$) とすると、それぞれの粒子密度は

$$\begin{aligned}\rho &= i \left[\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right] = 2E/V \text{ (ボゾン)} \\ &= \psi^\dagger \psi = 2E/V \text{ (フェルミオン)}\end{aligned}\tag{A.2}$$

となる。 i (始状態) $\rightarrow f$ (終状態) の遷移振幅を T_{fi} とすると、単位体積の遷移確率は

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV}\tag{A.3}$$

である。ここで T は相互作用している時間間隔を表す。遷移振幅は

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) \mathcal{M}_{fi}\tag{A.4}$$

ここで、 \mathcal{M}_{fi} は不変散乱振幅である。TV は全空間での積分より W_{fi} は

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) |\mathcal{M}_{fi}|\tag{A.5}$$

となる。散乱断面積を σ とすると、

$$\sigma = \frac{W_{fi}}{\text{入射フラックス}} \cdot (\text{終状態の数})\tag{A.6}$$

と遷移確率と関係する。ここでの入射フラックスと終状態の数は密度に対応している。終状態の数は $V d^3 p / (2\pi)^3$ である。今、体積 V に $2E$ 個の粒子があるように規格化しているため、密度に対応した終状態の数は

$$\text{終状態の数} = \frac{V d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \cdot \frac{V d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}\tag{A.7}$$

次に入射フラックスについて考える。相対速度を v_{rel} とする。単位時間に単位面積を通過するビームの数は $|v_{rel}|2E_A/V$ 、単位体積中の標的粒子の数は $2E_B/V$ である。より密度に対応した入射フラックスは

$$\text{入射フラックス} = |v_{rel}| \cdot 2E_A/V \cdot 2E_B/V \quad (\text{A.8})$$

体積 V が断面積の計算に入ってくるが、不変散乱振幅 \mathcal{M}_{fi} から始状態と終状態の波動関数 ($\propto e^{-ipx}/\sqrt{V}$) より V は約分される。 V によらないので、以下 $V=1$ とおく。以上より散乱断面積の公式

$$\sigma = \int \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{|v_{rel}|2E_A2E_B} (2\pi)^4 \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (\text{A.9})$$

A.1.2 不変散乱振幅 ($e\mu$ 散乱)

ここで遷移振幅 T_{fi} について説明する。遷移振幅は散乱行列要素 S_{fi} で表すことができる。簡単なためスピン $1/2$ の電荷を持つ点粒子での電磁相互作用の二体問題として、電子とミュオン粒子の散乱について説明する。

$$e(p_1) + \mu(p_2) \rightarrow e(p_3) + \mu(p_4) \quad (\text{A.10})$$

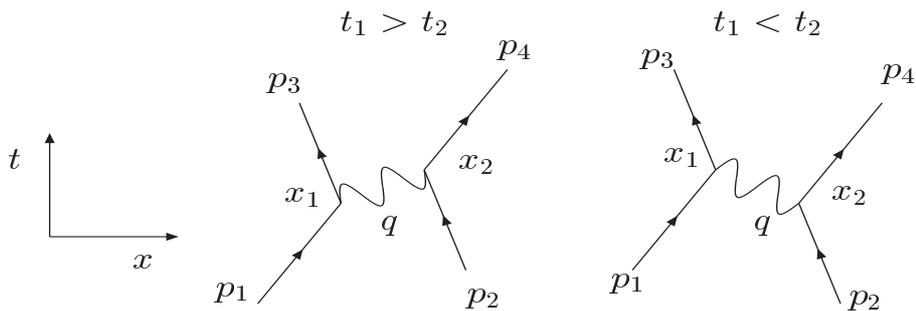


図 A.1 $e\mu$ 散乱、左図が $t_1 > t_2$ で効く過程、右図が $t_1 < t_2$ で効く過程

このように $e\mu$ 散乱は光子を交換することにより生じる。ここでは相互作用は二次で効く。

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \delta_{fi} - S_{fi} \\ S_{fi} &= \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\langle p_3, p_4 | \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) | p_1, p_2 \rangle] \\ \mathcal{H}_I &= -ej^\mu A_\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (\text{相互作用ハミルトニアン}) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

と関係する。図のように電子とミュオンは時空点で分離することができる。 \mathcal{H}_I の間に $(1 =) \sum_n |n\rangle\langle n|$ を挿入する。 $|n\rangle$ を一個の光子 (エネルギー-運動量 $q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$ 、偏極 λ) を含む状態とすると、

$\sum_n \rightarrow \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega}$ と書けるので、

$$T[\langle p_3, p_4 | \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) | p_1, p_2 \rangle] \rightarrow \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega} T[\langle p_3 | \mathcal{H}_I(x_1) | p_1, q\lambda \rangle \langle p_4, q\lambda | \mathcal{H}_I(x_2) | p_2 \rangle] \quad (\text{A.12})$$

また $p_1 \leftrightarrow p_2$ 、 $p_3 \leftrightarrow p_4$ としたものがあがるが、 $x_1 \leftrightarrow x_2$ で完全に対称であり、(A.11) の因子 $2!$ を相殺するのみで、上式のみ考慮すればよい。行列要素を具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned}\langle p_3 | \mathcal{H}_I | p_1, q\lambda \rangle &= -e\bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu u_r(p_1)e^{-i(p_1-p_3)x_1} \langle 0 | A_\mu(x_1) | q\lambda \rangle \\ \langle p_4, q\lambda | \mathcal{H}_I | p_2 \rangle &= -e\bar{u}_m(p_4)\gamma^\nu u_l(p_2)e^{-i(p_2-p_4)x_2} \langle q\lambda | A_\nu(x_2) | 0 \rangle\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

s, r, m, l はそれぞれスピン自由度である。上式より、(A.11) 式は

$$\begin{aligned}S_{fi} &= (-i)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 T[e\bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu u_r(p_1)e^{-i(p_1-p_3)x_1} \\ &\cdot \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega} \langle 0 | A_\mu(x_1) | q\lambda \rangle \langle q\lambda | A_\nu(x_2) | 0 \rangle \cdot e\bar{u}_m(p_4)\gamma^\nu u_l(p_2)e^{-i(p_2-p_4)x_2}]\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

ただし、光子による伝播関数は

$$iD_{F\mu\nu} = \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega} T[\langle 0 | A_\mu(x_1) | q\lambda \rangle \langle q\lambda | A_\nu(x_2) | 0 \rangle] = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x_1-x_2)} \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right)\quad (\text{A.15})$$

で与えられ、(A.14) 式は

$$\begin{aligned}S_{fi} &= (-i)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 e\bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu u_r(p_1)e^{-i(p_1-p_3)x_1} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x_1-x_2)} \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right) \\ &\cdot e\bar{u}_m(p_4)\gamma^\nu u_l(p_2)e^{-i(p_2-p_4)x_2}\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

x_1, x_2, q の順に積分すると、 S_{fi}, T_{fi} は

$$\begin{aligned}S_{fi} &= \delta_{fi} - (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot \bar{u}_s(p_3)(ie\gamma^\mu)u_r(p_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}_m(p_4)(ie\gamma^\nu)u_l(p_2) \\ T_{fi} &= -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M}_{fi}\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

ただし、 $q = p_3 - p_1 = p_2 - p_4$ 、 \mathcal{M}_{fi} は不変散乱振幅である。

$$\mathcal{M}_{fi} = e^2 \bar{u}_s(p_3)\gamma^\mu u_r(p_1) \frac{-1}{q^2} \bar{u}_m(p_4)\gamma_\mu u_l(p_2)\quad (\text{A.18})$$

次に、 $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ を計算する。(A.18) 式を二乗し、スピンについて平均すると、(ただし電子とミュオン粒子のスピン自由度を $f_e = 2$ 、 $f_\mu = 2$ とする)

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{1}{f_e f_\mu} \sum_{\text{スピン}} \mathcal{M}_{fi}^* \cdot \mathcal{M}_{fi} \\ &= \frac{e^4}{q^4} \cdot \frac{1}{2} \sum_{s,r} [\bar{u}_r(p_3)\gamma^\mu u_s(p_1)]^* [\bar{u}_r(p_3)\gamma^\nu u_s(p_1)] \\ &\cdot \frac{1}{2} \sum_{m,l} [\bar{u}_m(p_4)\gamma_\mu u_l(p_2)]^* [\bar{u}_m(p_4)\gamma_\nu u_l(p_2)] \\ &= \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

$L^{\mu\nu}$ 、 $M_{\mu\nu}$ はそれぞれ電子、ミュー粒子の項にわけた。この項は電子、ミュー粒子のレプトンテンソルと呼ばれる。 m_e は電子質量、 m_μ はミュー粒子質量 とすると不変散乱振幅は、

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s,r} [\bar{u}_r(p_3) \gamma^\mu u_s(p_1)]^* [\bar{u}_r(p_3) \gamma^\nu u_s(p_1)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s,r} u_s(p_1) \bar{u}_s(p_1) \gamma^\mu u_r(p_3) \bar{u}_r(p_3) \gamma^\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\nu \\ &= 2[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 p_3 + m_e^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= 2[p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_2 p_4 + m_\mu^2)] \quad (L^{\mu\nu} \text{と同じ計算}) \\ \therefore |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} [(p_3 p_4)(p_1 p_2) + (p_3 p_2)(p_1 p_4) - m_\mu^2 p_3 p_1] \quad (m_e \text{は無視した。}) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A.1.3 ファイマン規則

不変散乱振幅には一定のルールがある。図 A.1 をファイマン図と呼び、ファイマン図と計算には 1:1 の対応がある。ファイマン図を用いることで、簡単に計算できる。ここではスピン 1/2 のディラック粒子の電磁相互作用の場合を説明する。相互作用ハミルトニアンは (A.11) 式のハミルトニアンである。図 A.1 で、電子やミュー粒子など外から入射する粒子や外へ出て行く粒子は外線と呼び、間の光子の部分の内線と呼び、その結合部を頂点と呼ぶことにする。外線、内線の波動関数は

- 始状態のディラック粒子： $\psi(x) \propto u(p)e^{-ipx}$ ， 終状態のディラック粒子： $\bar{\psi}(x) \propto \bar{u}(p)e^{ipx}$
- 始状態の反ディラック粒子： $\bar{\psi}(x) \propto \bar{v}(p)e^{-ipx}$ ， 終状態の反ディラック粒子： $\psi(x) \propto v(p)e^{ipx}$
- 始状態の光子 (スピン 1)： $A_\mu(x) \propto \epsilon_\mu e^{-ipx}$ ， 終状態の光子： $A_\mu(x) \propto \epsilon_\mu(p)^* e^{ipx}$
- 中間状態の光子 (光子の伝播関数)： $D_F^{\mu\nu} = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$

となる。よりファイマン規則による外線、内線、頂点は下の図のようになる。

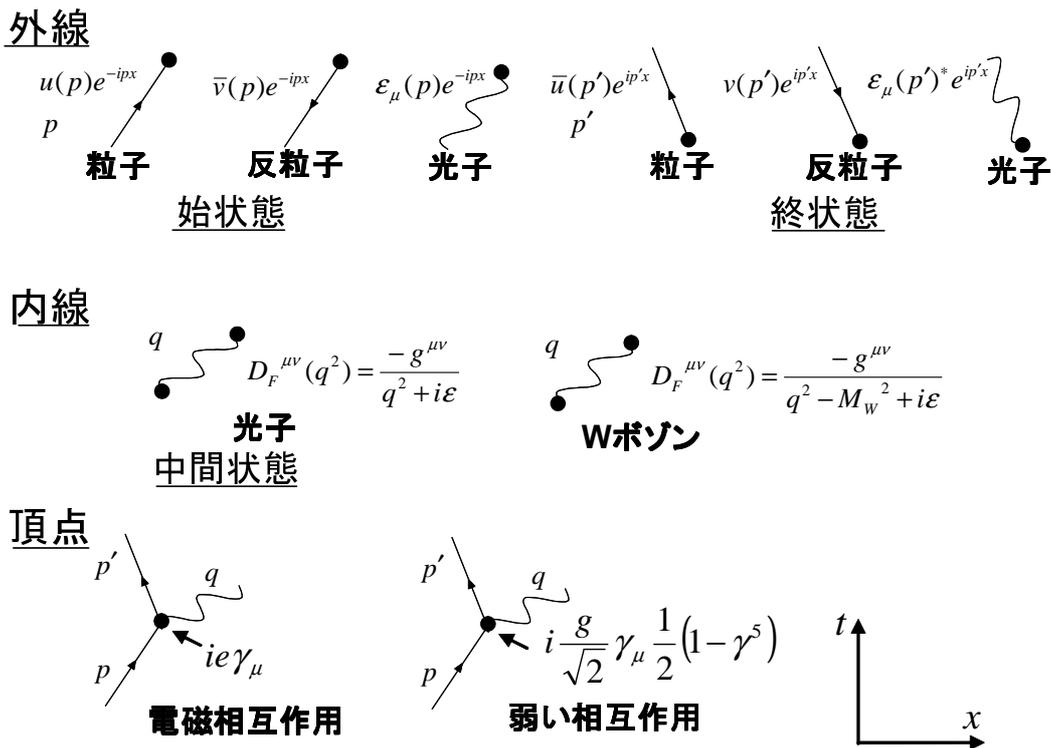


図 A.2 ファイマン規則の図解

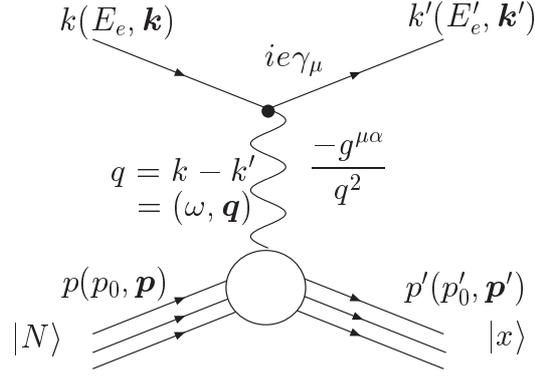
これにより不変散乱振幅を容易に導くことができる。時空積分より δ 関数が生じ、全体のエネルギー-運動量保存則を示す。ちなみに先程の $e\mu$ 散乱の計算も図 (A.2) の関係を用いても、(A.18) 式を計算できる。弱い相互作用も同様に計算できるので、上の図に示した。 g は結合定数を表しており、

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \tag{A.22}$$

でフェルミ定数 $G_F = 1.16638 \times 10^{-5} GeV^{-2}$ と関係を示す。Z ボゾンを媒介する弱い相互作用の場合、 $M_W = 80.4 GeV/c^2$ を $M_Z = 91.2 GeV/c^2$ にすればよい。それぞれ W ボゾンの質量、Z ボゾンの質量になっている。

A.2 電子核子散乱断面積導出

電子核子散乱断面積の計算について説明する。エネルギー-移行量 ($-q^2$) を大きくすると、核子は励起した状態に散乱されたり、破壊された状態へ散乱される。ので、電子核子散乱の不変散乱振幅を一般的な形で表す。核子の始状態を $|N\rangle$ とし、終状態を $|x\rangle$ とすると、ファイマン図 ($e + N \rightarrow e + x$) は


 図 A.3 $eN \rightarrow ex$ のファイマン図

より不変散乱振幅を計算する。(A.19) 式より電子ミュオン粒子の散乱で、電子とミュオン粒子の計算を分離することができた。同じ様に電子の部分と核子の部分を分離して表記する。

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (\text{A.23})$$

電子部分のテンソルを $L^{\mu\nu}$ (レプトンテンソル)、核子部分のテンソルを $W_{\mu\nu}$ (ハドロンテンソル) と表している。各々

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= 2[k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - g^{\mu\nu}(kk')] \\ W_{\mu\nu} &= \sum_x \langle N | J_\mu | x \rangle \langle x | J_\nu | N \rangle \delta^4(p + q - p_x) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

と計算できる。ここでの x は全てのハドロンの状態 (散乱後の核子) を示している。

(ただし、 $x = N$ のとき $\langle x | J_\nu | N \rangle = \bar{u}_{s'}(p_x) [F_1(q^2)\gamma_\nu + \frac{\chi}{2M} F_2(q^2) i\sigma_{\mu\nu} q^\nu] u_s(p)$)

ファイマン図より核子の部分は光子と核子の散乱と見ることができるので、変数は p, q または $g_{\mu\nu}$ で構成されるべきである。よりハドロンテンソルの一般的な形は次のように書く

$$W_{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p_\mu p_\nu - i\epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} p^\sigma q^\lambda \frac{W_3}{2M^2} + \frac{W_4}{M^2} q_\mu q_\nu + \frac{W_5}{M^2} (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) \quad (\text{A.25})$$

W_i はハドロンの構造関数である。 W_3 の項は反対称テンソルであるが、電子散乱の場合、 $L^{\mu\nu}$ は対称テンソルである。より反対称テンソルの項 (W_3 の項) は消えてしまう。ここでカレントの保存 ($\partial_\mu j^\mu = 0$) と関係した条件がある。

$$q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0, \quad q_\mu L^{\mu\nu} = q_\nu L^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.26})$$

これより W_4, W_5 は

$$W_5 = -\frac{p \cdot q}{q^2}, \quad W_4 = \left(\frac{p \cdot q}{q^2}\right)^2 W_2 + \frac{M^2}{q^2} W_1 \quad (\text{A.27})$$

(A.25) 式を整理すると

$$W_{\mu\nu} = W_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + W_2 \frac{1}{M^2} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu\right) \quad (\text{A.28})$$

上式で W_i はハドロンカレントの頂点において、4 元運動量から作られるローレンツスカラー変数の関数である。具体的に計算していくと、

$$L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 4W_1(kk') + \frac{2W_2}{M^2} [2(pk)(pk') - M^2 kk'] \quad (\text{A.29})$$

核子静止系 ($p = 0$) として計算すると、

$$L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = 4EE' \cos^2(\theta/2)[2W_1 \tan^2(\theta/2) + W_2] \quad (\text{A.30})$$

次に散乱断面積を計算する。終状態の積分にかんしてはすべてハドロンの構造関数へ組み込まれている。

(A.9) 式より散乱断面積は

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4ME_e} \left(\frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} 4\pi M \right) \frac{d^3k'}{2E'_e(2\pi)^3} \\ \frac{d\sigma}{dE'_e d\Omega} &= \frac{\alpha^2 E'_e}{q^4 E_e} L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} \\ &= \frac{4\alpha^2 E_e'^2}{q^4} \cos^2 \frac{\theta}{2} [2W_1 \tan^2 \theta + W_2] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

ただし、 $4\pi M$ は規格因子、 $d^3k' = E_e'^2 dE_e' d\Omega$ 、 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ 、 α は微細構造定数 ($\alpha = e^2/4\pi = 1/137$)。ここでは簡単のため電子質量を無視した。

A.2.1 光子核子散乱断面積計算

電子核子散乱では、電子が一個の光子を核子と交換して、散乱を起こす計算であった。つまり核子が直接散乱しているのは電子ではなく光子と散乱している。光子 (仮想光子) と核子の散乱について計算を説明する。ただし、光子は電子から作られる仮想光子 ($q^2 \neq 0$) である。

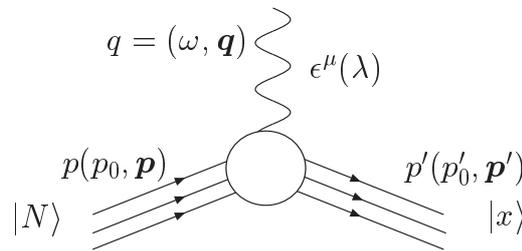


図 A.4 $\gamma N \rightarrow x$ のファイマン図

上図のファイマン図より不変散乱振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= e\epsilon_\mu(\lambda)\langle x|J^\mu|N\rangle \\ |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= e^2 \sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda)\epsilon_\nu(\lambda)^* W^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

(A.9) 式より散乱断面積は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4MK} \cdot 4\pi M \cdot e^2 \sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda)\epsilon_\nu(\lambda)^* W^{\mu\nu} \\ &= \frac{4\pi^2\alpha}{K} \sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda)\epsilon_\nu(\lambda)^* W^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

ちなみに規格因子として、 $4\pi M$ が加わっている。 K は $q^2 = 0$ のとき、 $K = \omega$ であり、入射フラックスは $4MK$ で与えられる。 $q^2 \neq 0$ のときは次のように選ぶ。

$$K = \frac{W^2 - M^2}{2M} \quad (\text{A.34})$$

これは Hand の約束として知られている。ここで、光の偏極ベクトル $\epsilon_\mu(\lambda)$ について説明する。実光子の場合は二つの偏極のみであったが、仮想光子の場合は縦偏極も考えなければならない。偏極ベクトル $\epsilon_\mu(\lambda)$ は 4 元運動量 q^μ とすれば、

$$q \cdot \epsilon(\lambda) = 0, \quad \lambda = \pm 1, 0 \quad (\text{A.35})$$

を満たす。自由粒子であれば q は時間的 $q^2 > 0$ であり、上式を満たす 3 個の偏極ベクトルはすべて空間的であるが、仮想光子の場合は q が空間的であるので、 $\epsilon(\lambda)$ の一つは時間的になる。そこで、3 個の偏極ベクトル $\epsilon(\lambda)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \epsilon(\pm 1) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0; 1, \pm i, 0) \\ \epsilon(0) &= \frac{1}{\sqrt{-q^2}}(q_3; 0, 0, q_0) = \frac{1}{\sqrt{-q^2}}(\sqrt{\omega^2 - q^2}; 0, 0, \omega) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

これらの偏極ベクトルはローレンツ条件 (A.35) 式のほかに規格直交性

$$\epsilon(\lambda) \cdot \epsilon(\lambda')^* = (-)^{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\text{A.37})$$

と完全条件

$$\sum_{\lambda} (-1)^{\lambda+1} \epsilon^\mu(\lambda) \epsilon^\nu(\lambda)^* = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (\text{A.38})$$

を満たす。(A.28),(A.33),(A.37),(A.38) 式より横偏極の光子、縦偏極の光子による散乱断面積 σ_T, σ_L を計算できる。

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 \alpha}{K} \sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon_\nu(\lambda)^* W^{\mu\nu} = \frac{4\pi^2 \alpha}{K} W_1 \\ \sigma_L &= \frac{4\pi^2 \alpha}{K} \sum_{\lambda=0} \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon_\nu(\lambda)^* W^{\mu\nu} = \frac{4\pi^2 \alpha}{K} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) W_2 - W_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

上式から W_1, W_2 を σ_T, σ_L で定義し、電子核子散乱断面積に代入すれば、電子核子散乱断面積を光子核子散乱断面積で定義することができる。

$$\frac{d\sigma}{dE'_e d\Omega} = \Gamma(\sigma_T + \epsilon\sigma_L) \quad (\text{A.40})$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\alpha K}{2\pi^2(-q^2)} \frac{E'_e}{E_e} \frac{1}{1-\epsilon} \\ \epsilon &= \left(1 - 2 \frac{\omega^2 - q^2}{q^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

付録 B

ベクトルカレント

B.1 アイソスピン

クォークで構成されている粒子 (ハドロン) には、電荷は異なるが、性質の似通った小グループが存在する。次の粒子群は、質量がほとんど同じであるばかりか、強い相互作用するときの力の強さまで同一であることが知られる。

	$\left[\begin{array}{c} p \\ \\ n \end{array} \right]$	938.28	$\left[\begin{array}{c} \pi^+ \\ \\ \pi^- \end{array} \right]$	139.567	$\left[\begin{array}{c} K^+ \\ \\ K^0 \end{array} \right]$	493.67	$\left[\begin{array}{c} \Sigma^+ \\ \\ \Sigma^- \end{array} \right]$	1189.36
$\delta m/m$		0.14%		3.3%		0.8%		0.33%

上の式は性質の似ているグループである。数値は質量 (MeV/c^2) を表し、 $\delta m/m(\%)$ はずれ具合を示している。電荷が異なるため電磁相互作用の分だけ異なるが、これは強い相互作用と比べて 100 倍程度小さい。強い相互作用では関する限り、これらの粒子群は質量差を無視すれば、同一グループ野中では区別つかない同一粒子であるといえる。そこで、スピン多重項が中心力のもとでは縮退している例にならって、アイソスピン多重項と呼ぶ。アイソスピンをスピンと同様に回転演算子と考えてけいさんすることができる。

B.1.1 アイソスピンの SU(2)

核子について陽子と中性子という内部自由度を持つとみなし、アイソスピンで説明する。SU(2) 対称性が成り立ち、 (n, p) は基本表現を作る。アイソスピンの生成演算子はスピンの場合と同様に

$$[I_j, I_k] = i\epsilon_{jkl} I_l \quad (\text{B.1})$$

を満たす。基本表現では生成演算子を $I_i \equiv \tau_i/2$ と書く。すると、

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

と書ける。これらは陽子と中性子の状態

$$\psi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

に作用する。一番大きい正電荷を持つ粒子を I_3 の最大値に対応させる。これらより核子の場合、アイソスピンの大きさ I 、第三成分 I_3 とすると、 $I = 1/2$ 、 $I_3 = \pm 1/2$ である。以下に今回使う粒子のアイソスピンを説明する。

π 粒子の場合、三つの状態があり、アイソスピンの大きさ $I = 1$ 、第三成分 $I_3 = -1, 0, +1$ である。第三成分はそれぞれ、 π^- 、 π^0 、 π^+ の状態を示している。

Δ 粒子の場合、四つの状態があり、アイソスピンの大きさ $I = 3/2$ 、第三成分 $I_3 = -3/2, -1/2, +1/2$ 、 $+3/2$ である。第三成分はそれぞれ、 Δ^- 、 Δ^0 、 Δ^+ 、 Δ^{++} の状態を示している。

B.2 ベクトルカレントの保存 (CVC)

B.2.1 弱いカレントと電磁カレントの相関

まず、 β 崩壊 ($n \rightarrow p l \bar{\nu}_l$, $l = e \text{ or } \mu$) とミュー粒子崩壊 ($\mu \rightarrow \nu_\mu e \bar{\nu}_e$) の散乱振幅を比較する。

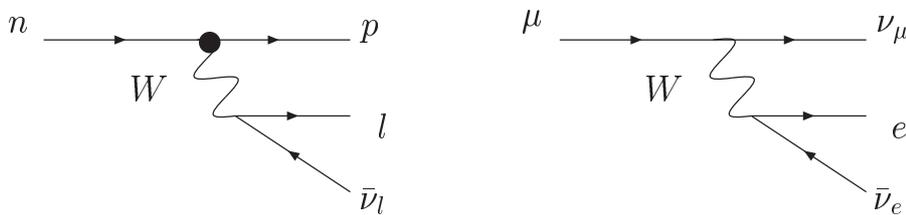


図 B.1 β 崩壊とミュー粒子崩壊

$$\mathcal{M}(n \rightarrow p l \bar{\nu}_l) = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} [\bar{u}_p \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) u_n] [\bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_{\bar{\nu}_e} + \bar{u}_\mu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_{\bar{\nu}_\mu}] \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{M}(\mu \rightarrow \nu_\mu e \bar{\nu}_e) = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_{\bar{\nu}_e}] \quad (\text{B.5})$$

それぞれの結合定数の差は強い作用が入っているか入っていないかの差である。

$$G_\mu = G_F = 1.16638 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (\text{フェルミ定数}) \quad (\text{B.6})$$

$$G_\beta = G_F \times \cos \theta_c = 1.147 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (\text{B.7})$$

$\cos \theta_c$ は $u \leftrightarrow d$ の混合角 (カビボ角) である。 $C_V \approx 1$ と測られこの結合定数がほぼ同じであったため、弱い相互作用のベクトル部分 (γ^μ の係数) は保存すると考えられた。

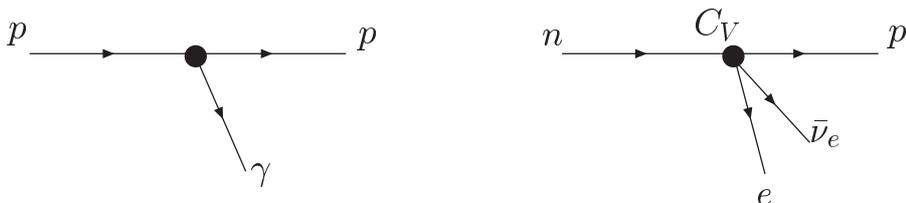


図 B.2 ベクトル部分の模式的な図

つまり、弱い相互作用のベクトル部分を j_W^μ とすると、

$$\partial_\mu j_W^\mu \equiv \partial_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n = \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \tau_+ \psi = 0 \quad (\text{B.8})$$

ただし、

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

とかける。これは強い相互作用を受けるハドロンの電荷が、強い相互作用のないレプトンの電荷と同一であるのは電流保存則によって保証されているという事実から類推されたことである。電磁カレントは

$$\partial_\mu j_{EM}^\mu = \partial_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p = \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right) \psi = 0 \quad (\text{B.10})$$

ただし、

$$\psi_p = \frac{1 + \tau_3}{2} \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

このことから、両者は同一のアイソスピン保存カレント

$$j_I^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu (\tau/2) \psi, \quad \partial_\mu j_I^\mu = 0 \quad (\text{B.12})$$

の違う成分であるという考えに達する。これを CVC (conserved vector current) という。

B.2.2 ベクトルカレント (核子の場合)

陽子のカレントは (1.44) 式より

$$\begin{aligned} J_{EM}^\mu &= \langle p' | \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p | p \rangle \\ &= \bar{u}(p') \left[F_1^p(q^2) \gamma^\mu + \frac{\chi_p}{2M} F_2^p(q^2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p) \\ q^2 &= (p - p')^2 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

指数の部分は積分した。中性子の場合、 $p \rightarrow n$ にすればよい。すると、(B.10) 式と (B.13) 式を比較すれば、(B.10) 式の τ_3 部分は

$$j_3^\mu = \bar{\psi} \left[F_1^V(q^2) \gamma^\mu + \frac{\chi_V}{2M} F_2^V(q^2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] \frac{\tau_3}{2} \psi \quad (\text{B.14})$$

$$F_1^V = F_1^p - F_2^n, \quad \chi_V F_2^V = \chi_p F_2^p - \chi_n F_2^n \quad (\text{B.15})$$

となる。CVC は (B.8) 式が、(B.14) 式の $[\dots]$ の中と同一であることを意味する。すなわち弱いカレントのベクトル部分が

$$j_W^\mu = \bar{\psi} \left[F_1^V(q^2) \gamma^\mu + \frac{\chi_V}{2M} F_2^V(q^2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] \tau_+ \psi \quad (\text{B.16})$$

と表されることになる。

付録 C

エネルギーの保存モデル

この章はエネルギー保存について説明する。原子核内で核子は束縛を受けるため、束縛エネルギーをエネルギー保存に考慮しなければならない。このとき、束縛エネルギーの効果をエネルギー移行 (ω) に組み込むか、始状態の核子のエネルギーへ組み込む。前者が On-Shell モデルと呼び、後者が Off-Shell モデルと呼ぶ。これは始状態の核子エネルギーが殻模型で記述できるか、できないかの違いである。Off-Shell モデルの場合、核子のエネルギーへ束縛エネルギーの効果が組み込まれるので、質量が核子質量で記述することができなくなる。そのため Off-Shell となる。

準弾性散乱については [3] で計算されているため、この [3] のモデルを用いる。[3] での計算は始状態の核子が殻模型で記述できる On-Shell モデルである。よって主に共鳴生成反応の場合のエネルギー保存について説明する。

C.1 On-Shell モデル

始状態の核子が On-Shell の場合の計算について説明する。エネルギー保存より

$$E_e + E_0 = E'_e + E_{\mathcal{R}} + p'_0 \quad (\text{C.1})$$

(2.51) 式の δ 関数より E の値が決まり、

$$E_0 - E_{\mathcal{R}} = M - E \quad (\text{C.2})$$

これをエネルギー保存の式へ代入し、

$$E = \omega + M - p'_0 \quad (\text{C.3})$$

これは損失エネルギーの公式 ((2.34) 式) から得られる。ここで、(2.55) 式にも出てきた $\tilde{\omega} = p'_0 - p_0$ を導入する。

$$E = \omega + M - p'_0 = \omega - \tilde{\omega} + M - p_0 \quad (\text{C.4})$$

となり、

$$\delta\omega = \omega - \tilde{\omega} = E - M + p_0 \quad (\text{C.5})$$

これはエネルギー移行の差を示しており、電子のエネルギー移行と核子のエネルギー移行が違うことを示している。よってカレントの保存を破っている。

$$q_\mu W_N^{\mu\nu} \neq 0 \quad (\text{C.6})$$

つまり電子のレプトンテンソルは q で計算し、核子のハドロンテンソルは \tilde{q} で計算しなければならない。ちなみに $\tilde{q} = (\tilde{\omega}, \mathbf{q})$ である。

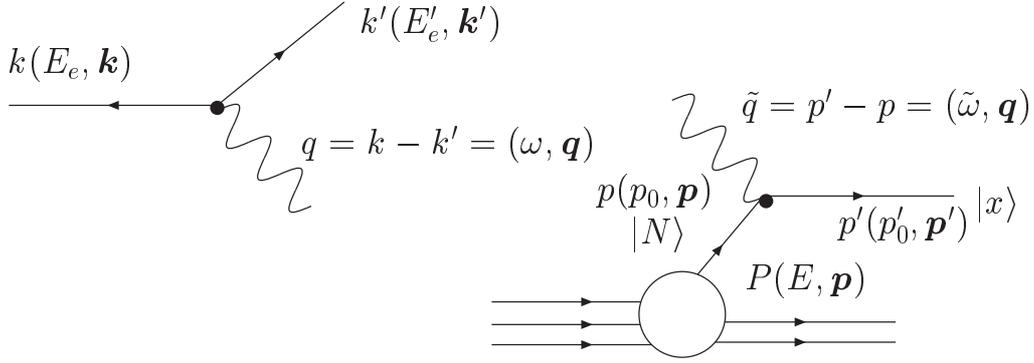


図 C.1 On-Shell による電子と原子核内の核子の散乱のファイマン図

上図のように計算する。ちなみに仮想光子へ組み込んだ束縛エネルギーの効果は (A-1) の核子による原子核のエネルギー E_R へ組み込まれている。(A-1) の核子による原子核は観測しないため計算上現れない。

On-Shell の電子原子核散乱断面積の計算について説明する。電子原子核散乱断面積の計算は電子核子散乱断面積と同様に計算できて、

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \frac{\alpha^2 E'_e}{q^4 E_e} L_{\mu\nu} W_A^{\mu\nu} = \sigma_M \left[2W_1^A(q^2, \omega) \tan \frac{\theta}{2} + W_2^A(q^2, \omega) \right] \quad (\text{C.7})$$

となる。ただし、 σ_M はモット散乱断面積 ((1.24) 式) である。インパルス近似の記述では

$$W_A^{\mu\nu}(q^2, \omega) = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{p_0} W_N^{\mu\nu}(p, \tilde{q}) \quad (\text{C.8})$$

となる。ただし、

$$W_N^{\mu\nu} = -W_1^N(\tilde{q}^2) \left(g^{\mu\nu} - \frac{\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu}{\tilde{q}^2} \right) + \frac{W_2^N(\tilde{q}^2)}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot \tilde{q}}{q^2} \tilde{q}^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot \tilde{q}}{q^2} \tilde{q}^\nu \right) \quad (\text{C.9})$$

である。カレントの保存は破れているが第三成分では成立し、

$$W_N^{3\nu}(p, \tilde{q}) = \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} W_N^{0\nu}(p, \tilde{q}) \quad (\text{ただし、}\nu \neq 3)$$

$$W_N^{33}(p, \tilde{q}) = \left(\frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \right) W_N^{00}(p, \tilde{q})$$

となる。これらより (C.8) 式の W_1^A 、 W_2^A は

$$W_1^A = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{p_0} \left[W_1^N + \frac{1}{2} \frac{W_2^N}{M^2} \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2} \right] \quad (\text{C.10})$$

$$W_2^A = \int d^3\mathbf{p} dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M}{p_0} \left[W_1^N \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \left(\frac{q^2}{\tilde{q}^2} - 1 \right) + \frac{W_2^N}{M^2} \left\{ \frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} \left(p_0 - \tilde{\omega} \frac{\tilde{q} \cdot \mathbf{p}}{\tilde{q}^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2} \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2} \right\} \right] \quad (\text{C.11})$$

となる。まず準弾性散乱の場合、 W_1^N 、 W_2^N は

$$W_1^N = -\frac{\tilde{q}^2}{4M^2} \delta\left(\tilde{\omega} + \frac{\tilde{q}^2}{2M}\right) G_M^{N^2} \quad (\text{C.12})$$

$$W_2^N = \frac{1}{1 - \tilde{q}^2/(4M^2)} \delta\left(\tilde{\omega} + \frac{\tilde{q}^2}{2M}\right) \times \left(G_E^{N^2} - \frac{\tilde{q}^2}{4M^2} G_M^{N^2}\right) \quad (\text{C.13})$$

となる。これを用い、準弾性散乱断面積を計算する。終状態相互作用を加える場合は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} &= \int \omega' f_q(\omega - \omega') \left(\frac{d\sigma_{eA}}{d\omega' d\Omega} \right)_{IA}, \\ f_q(\omega - \omega') &= \delta(\omega - \omega') \sqrt{T_A} + \int \frac{dt}{2\pi} e^{i(\omega - \omega')t} [U_q^{FSI}(t) - \sqrt{T_A}] \end{aligned}$$

これは 3.3 の CGA の節を参照。

共鳴生成反応の場合、 W_1^N 、 W_2^N は

$$W_1^N = \frac{K}{4\pi\alpha^2} \sigma_T(\tilde{q}^2, W) \quad (\text{C.14})$$

$$W_2^N = \frac{K}{4\pi\alpha^2} (\sigma_L(\tilde{q}^2, W) + \sigma_T(\tilde{q}^2, W)) \frac{-\tilde{q}^2}{-\tilde{q}^2 + \tilde{\omega}^2} \quad (\text{C.15})$$

ただし、

$$K = \frac{W^2 - M^2}{2M} \quad (\text{C.16})$$

である。 σ_T 、 σ_L については MAID モデルの計算を使う。準弾性散乱は [3][9][15] を参照した。

C.2 Off-Shell モデル

Off-Shell モデルについて説明する。束縛エネルギーは (C.3) 式より

$$E = \omega + M - p'_0 \quad (\text{C.17})$$

核子エネルギーへ束縛エネルギーの効果を組み込むため、新しく

$$\omega' = p'_0 - \omega \quad (\text{C.18})$$

を導入する。(C.17) 式より

$$\omega' = M - E \quad (\text{C.19})$$

で計算する。このとき、核子の質量は M ではなく

$$\tilde{M} = \sqrt{\omega'^2 - \mathbf{p}^2} \quad (\text{C.20})$$

となる。積分範囲で値も変わるが、およそ $\tilde{M} \sim 900(\text{MeV}/c^2)$ 程度で前後する。これは原子核内の核子の平均運動量 $\sim 100(\text{MeV}/c)$ 、平均束縛エネルギー $\sim 25\text{MeV}$ の場合の値である。

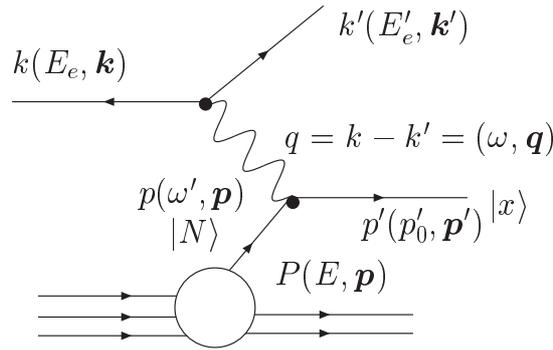


図 C.2 Off-Shell モデルによる電子原子核散乱のファイマン図

On-Shell モデルはエネルギー移行と (A-1) の核子による原子核エネルギー E_R の間で束縛エネルギーの組み込みがあったが、Off-Shell の場合は核子エネルギーと (A-1) の核子による原子核エネルギーとの間で束縛エネルギーの組み込みが起こる。つまり、計算上では核子エネルギーを ω' に置き換えて計算すればよい。

共鳴生成反応の計算は (2.79) 式より

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \frac{\tilde{M}}{p_0} \frac{E'_e}{E_e} A \left(\frac{E_R}{E'_R} \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_R d\Omega_R} \right) \quad (C.21)$$

ただし、

$$\frac{d\sigma_{eN}}{dE'_R d\Omega_R} = \Gamma(\sigma_T + \epsilon\sigma_L) \quad (C.22)$$

$$\Gamma = \frac{\alpha K}{2\pi^2(-t)} \frac{E'_R}{E_R} \frac{1}{1-\epsilon}, \quad K = \frac{W^2 - \tilde{M}^2}{2\tilde{M}}, \quad \epsilon = \left(1 - 2 \frac{\omega_R^2 - t}{t} \tan^2 \frac{\theta_R}{2} \right)^{-1} \quad (C.23)$$

である。

C.3 今回の計算モデル

今回計算に使ったエネルギー保存のモデルについて説明する。後の章で説明するが、On-Shell モデル、Off-Shell モデルでは電子原子核散乱断面積を精度良く計算できなかった。そこで、束縛エネルギーの効果スペクトル関数では使い、エネルギー保存へ組み込みはしなかった。

$$E_e + p_0 = E'_e + p'_0 \quad (C.24)$$

この記述により計算した。2.2 節で説明した計算はこのモデルによって記述した。

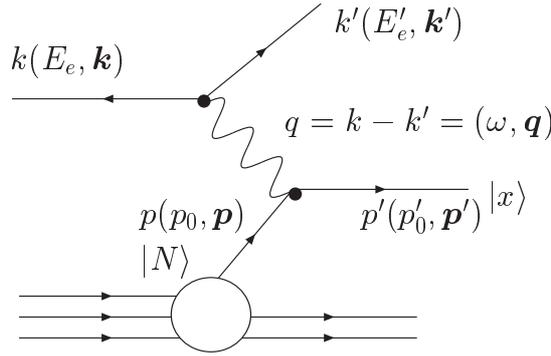


図 C.3 今回の計算モデルによる電子原子核散乱のファイマン図

共鳴生成反応断面積の計算は (2.79) 式より

$$\frac{d\sigma_{eA}}{dE'_e d\Omega} = \int d^3p dE P(\mathbf{p}, E) \frac{M E'_e}{p_0 E_e} A \left(\frac{E_R}{E'_R} \frac{d\sigma_{eN}}{dE'_R d\Omega_R} \right) \quad (C.25)$$

ただし、

$$\frac{d\sigma_{eN}}{dE'_R d\Omega_R} = \Gamma(\sigma_T + \epsilon\sigma_L) \quad (C.26)$$

$$\Gamma = \frac{\alpha K}{2\pi^2(-t)} \frac{E'_R}{E_R} \frac{1}{1-\epsilon}, \quad K = \frac{W^2 - M^2}{2M}, \quad \epsilon = \left(1 - 2 \frac{\omega_R^2 - t}{t} \tan^2 \frac{\theta_R}{2} \right)^{-1} \quad (C.27)$$

である。

C.4 エネルギー保存のモデル比較

エネルギー保存のモデルを比較した結果を説明する。

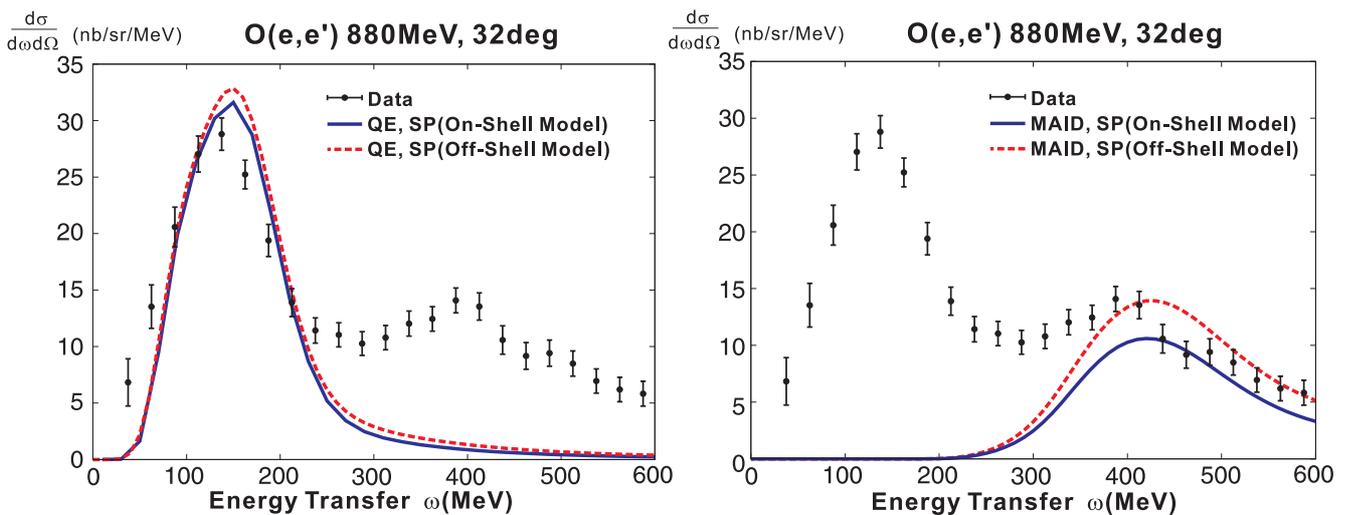


図 C.4 電子原子核 (^{16}O) 散乱で On-Shell モデルと Off-Shell モデルを比較した図。 $E_e = 880\text{MeV}$ 、 $\theta = 32$ 度で、点が実験データ、直線が On-Shell モデル、破線が Off-Shell モデルである。左の図が準弾性散乱のスペクトル関数、右の図が MAID モデルのスペクトル関数である。実験データは [20] を参照した。

図 C.4 は On-Shell モデルと Off-Shell モデルの違いを示している。On-Shell モデルと Off-Shell モデルによる散乱断面積の計算は準弾性散乱断面積ではあまり変わらず、MAID モデルによる 生成反応断面積では大きく異なる。MAID モデルの計算の場合、

$$\frac{d\sigma_{eN}}{dE'_R d\Omega_R} = \Gamma(\sigma_T + \epsilon\sigma_L) \tag{C.28}$$

(C.28) 式の σ_L と σ_T で主に違いが現れる。これは On-Shell モデルと Off-Shell モデルで σ_L と σ_T に変数として代入するエネルギー運動量移行 q^2 が異なるためである。On-Shell モデルは \tilde{q}^2 に対して、Off-Shell モデルは q^2 を代入するため、エネルギー運動量移行の差 $\delta q^2 (= q^2 - \tilde{q}^2 > 0)$ が生じる。準弾性散乱領域では q^2 の値が小さいため、エネルギー運動量移行の差も小さい。つまり、 q^2 の大きい領域の MAID モデルではエネルギー運動量移行の差も大きくなり、散乱断面積の差も大きくなる。

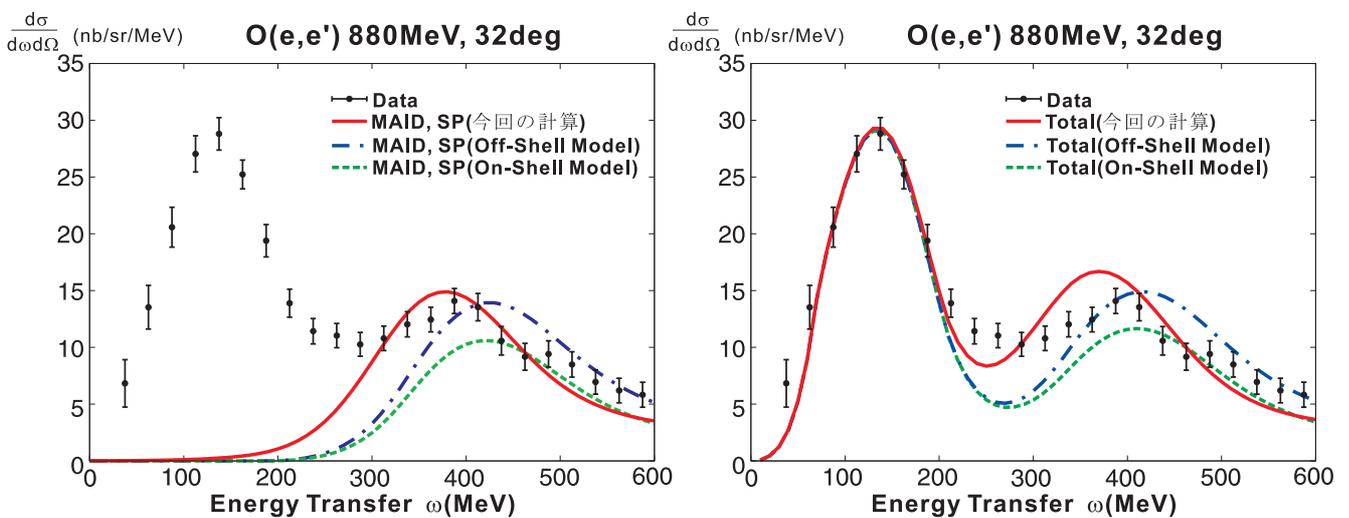


図 C.5 On-Shell モデル、Off-Shell モデル、今回の計算のモデルの違いを表した図。図 C.4 と同様のグラフに $E_e = 880\text{MeV}$ 、 $\theta = 32$ 度、点は実験データ、直線は今回の計算モデル、一点鎖線は Off-Shell モデル、破線は On-Shell モデル。左の図は MAID モデルでエネルギー保存モデルを比較した図。右の図は準弾性散乱も含めた結果。実験データは [20] を参照した。

図 C.5 は今回の計算したモデルと On-Shell モデル、Off-Shell モデルを比較した図である。MAID モデルでは Δ 共鳴生成反応が占めているためピークが $W = 1232\text{MeV}$ に対応する点にピークを持つ。しかし、On-Shell モデルと Off-Shell モデルはエネルギー保存に束縛エネルギーを考慮しているため、 $\delta\omega = \omega - \tilde{\omega} = p_0 - \omega'$ の分ピークがずれる。図 C.5 でエネルギー保存のモデルを比較した結果、今回の計算したモデルが準弾性散乱と 生成反応の境界領域を埋め、実験データとよく合っていたのでこのモデルを選んだ。

付録 D

電子核子散乱と原子核散乱の比較

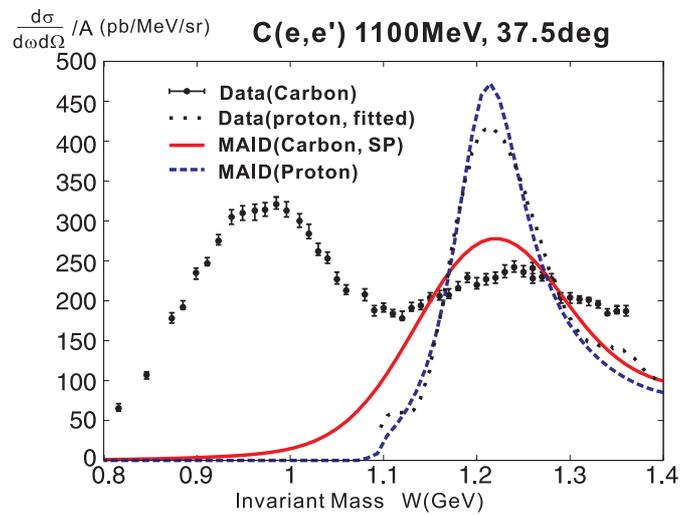


図 D.1 共鳴生成反応領域において、電子核子散乱と電子原子核 (^{12}C) 散乱断面積を比較した図。 $E_e = 1100\text{MeV}$, $\theta = 37.5$ 度、縦軸は散乱断面積で、 $1/A \cdot \text{pb}/(\text{MeV}\cdot\text{sr})$ ただし、核子の場合 $A = 1$ で原子核の場合 $A = 12$ 、横軸はエネルギー移行 $\omega(\text{MeV})$ である。点が実験データ、点線が電子核子散乱の実験データのフィッティング、直線が電子原子核散乱 (MAID モデル)、破線が電子核子散乱 (MAID モデル) である。実験データは [17] を参照した。

図 D.1 はスペクトル関数の効果を示している。電子核子散乱断面積と電子原子核散乱断面積を比較すると、原子核内の核子の束縛エネルギーと運動量の状態により電子原子核散乱断面積は広がりを持つことがわかる。このように電子核子散乱断面積に原子核効果を加えて電子原子核散乱断面積を計算する。

付録 E

Pauli 効果

ニュートリノ核子反応 (黒線) 及びニュートリノ原子核反応 (赤線) の断面積を $E_\nu = 1.3\text{GeV}$ で計算した図を示す。

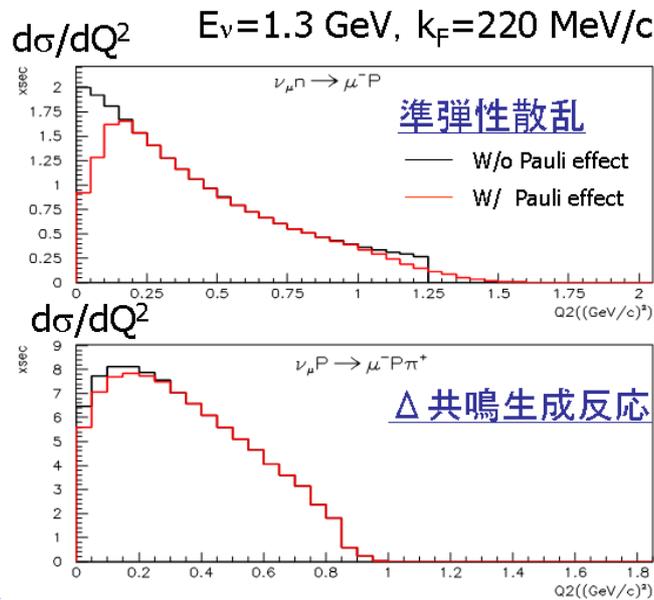


図 E.1 ニュートリノ原子核散乱断面積の Pauli 効果を示した計算値である。入射エネルギー $E_\nu = 1.3\text{GeV}$ 、フェルミ運動量 $k_F = 220\text{MeV}/c$ でのニュートリノ原子核散乱による Q^2 分布 ($d\sigma/dQ^2$) である。黒線が Pauli 効果なし、赤線が Pauli 効果ありの計算値である。上が準弾性反応、下が Δ 共鳴生成反応である。

図 E.1 は Pauli の効果についての計算結果である。図 E.1 に示すように、原子核効果 (Pauli 効果) は大変大きい。 $Q^2 < 0.2(\text{GeV}^2/c^2)$ の領域で Pauli の効果が大きく現れる。

Pauli 効果を精度よく計算することは不可能である。前方での原子核効果を計算モデルによらず求めるため、E04-001 実験 [21] では、電子ビームで核子 (陽子) 標的、炭素標的によるデータを収集した。その比を取ればこの原子核効果を測定できる。

E' (GeV)

	Q^2	-1.15	-0.966	-0.811	-0.682	-0.573	-0.481	-0.404
10.8	0.0499	C	C	C	C	C	C	C
13	0.0715	H2,D2	H2,D2,C,Al	H2,D2,C,Al	H2,D2,C,Al	H2,D2,C,Al	H2,D2,C,Al	H2,C
16	0.1063	H2,Al	D2,C,Al	D2,C,Al	D2,C,Al	D2,C,Al	D2,C,Al	
19	0.1467		D2	C	C	C	C	
22	0.1918		H2,D2,C,Al	D2,C,Al	H2,D2,C,Al	H2,D2,C,Al	H2,D2,C,Al	
28	0.2932	H2,C,Al	C	C	H2	C	C	
45	0.6136		H2,C,Al,Fe	H2,D2,C,Al,Fe	H2,C,Al,Fe	H2,D2,C,Al,Fe	H2,D2,C,Al,Fe	H2,D2,C,Al,Fe
55	0.7946			H2,D2,C,Al,Fe	H2,D2,C,Al,Fe	H2,D2,C,Al,Fe	H2,D2,C,Al,Fe	H2,D2,Al,Fe
60	0.8782				D2			
70	1.029				H2,D2,C,Al,Fe	H2,D2,C,Al,Fe	C,Al,Fe	

図 E.2 実験データによる Pauli 効果の解析データである。JLAB E04-001 の実験による $E_e = 1.2\text{GeV}$ の電子原子核散乱実験データを用いている。低い Q^2 における $A(e,e')$, $A=H,D,C,Al$ 。

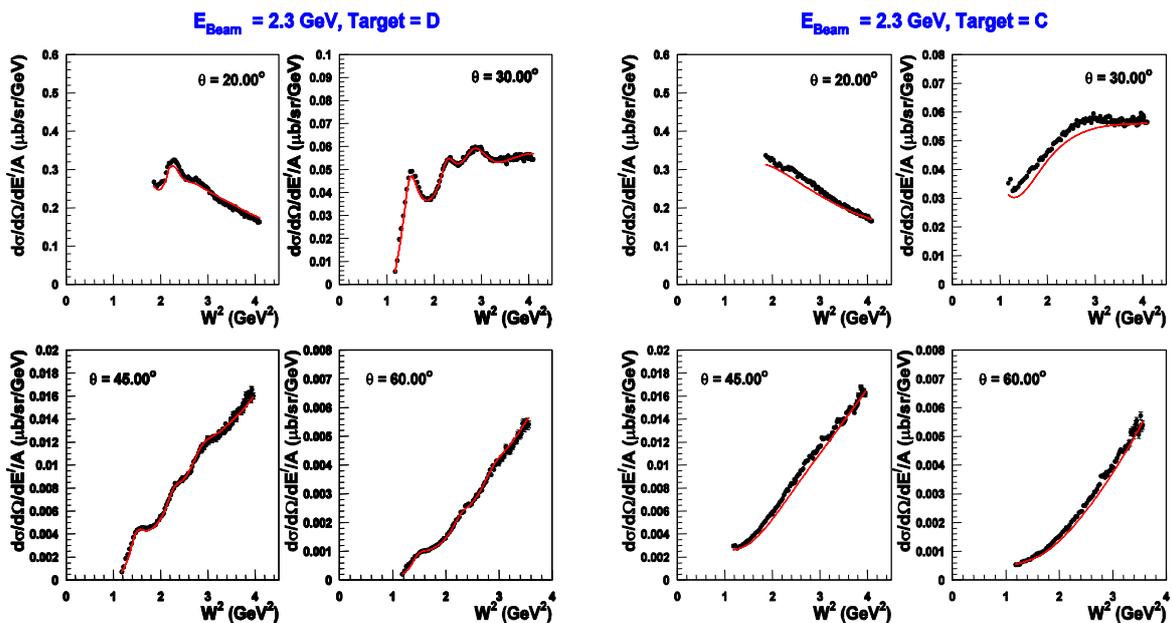


図 E.3 前方散乱による電子原子核散乱断面積の実験データである。実験データは JLab E04-001 の結果である。

図 E.3 は Pauli 効果を解析するために使われた実験データである。 $Q^2 < 0.2(\text{GeV}^2/c^2)$ の世界に唯一存在するデータは JLAB E40-001 の実験である。この実験は 2005 年に作田、他の提案により収集されたデータであり、現在解析中である。「吉澤忠尚 物理学会発表講演 2005 年春」ニュートリノ原子核散乱は低い Q^2 による散乱断面積が多いため、今後の結果が期待されている。

参考文献

- [1] H. Nakamura, T. Nasu, M. Sakuda, O. Benhar, Phys. Rev. C 76, 065208 (2007).
- [2] Proceedings of The Fifth International Workshop on Neutrino-Nucleus Interaction in the Few-GeV Region (NuInt07); T. Nasu, M. Sakuda, H. Nakamura, O. Benhar, AIP Conf. Proc. 967, 187 (2007).
- [3] O. Benhar, N. Farina, H. Nakamura, M. Sakuda, R. Seki, Phys. Rev. D 72, 053005 (2005).
- [4] E. A. Paschos, J. Y. Yu, M. Sakuda, Phys. Rev. D 69, 014013 (2004).
- [5] O. Lalakulich, E. A. Paschos, G. Piranishvili, Phys. Rev. D 74, 014009 (2006).
- [6] D. Drechsel, O. Hanstein, S.S. Kamalov and L. Tiator, Nucl. Phys. A 645, 145 (1999);
MAID2003 モデルの散乱断面積の計算結果 : <http://www.kph.uni-mainz.de/MAID/maid2003/>.
- [7] D. Drechsel, L. Tiator, J.Phys. G: Nucl. Phys. 18, 449 (1992).
- [8] T. Sato, T. Lee, Phys. Rev. C 54, 2660 (1996).
- [9] O. Benhar, et al., nucl-ex/0603029v2 (2007).
- [10] O. Benhar, et al., Nucl. Phys. A 579, 493 (1994).
- [11] O. Benhar, et al., Phys. Rev. C 44, 2328 (1991).
- [12] D. Rohe, et al., Phys. Rev. Lett. 93, 18 (2004).
- [13] D. Rohe, et al., Phys. Rev. C 72, 054602 (2005).
- [14] K. Garrow, et al., Phys. Rev. C 66, 044613 (2002).
- [15] T. De Forest, Nucl. Phys. A 392, 232 (1983).
- [16] J. S. O'Connell, et al., Phys. Rev. C 35, 1063 (1987).
- [17] R. M. Sealock, et al., Phys. Rev. Lett. 62, 1350 (1989).
- [18] I. Niculescu, et al., Phys. Rev. Lett. 85, 1186 (2000).
- [19] J. Mougey, M. Bernheim, et al., Phys. Rev. Lett. 41, 1645 (1978).
- [20] M. Anghinolfi, et al., Nuclear Physics A 602, 405 (1996).
- [21] V. Tvaskis, J. Steinman, R. Bradford(E04-001), Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 159, 163 (2006).
- [22] S. K. Singh, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 112, 77 (2002).
- [23] E. J. Brash, A. Kozlov, SH. Li, and G. M. Huber, Phys. Rev. C 65, 051001(R) (2002).
- [24] P. E. Bosted, Phys. Rev. C 51, 409 (1995).
- [25] The JHF-Kamioka neutrino project,
Y. Itow, et al., hep-ex/0106019 (2001).
- [26] Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment,
M. H. Ahn, et al., hep-ex/0606032v3 (2006).
- [27] 田村詔生, 末包文彦, 安田修, 日本物理学会誌, vol. 61, No.11, 799.

- [28] 作田誠, 別冊・数理物理科学 (2007年10月), 122.
- [29] R. M. MacAllister, R. Hofstadter, Phys. Rev. 102, 851 (1956).
- [30] Emmanuel A. Paschos, Electroweak Theory, CAMBRIDGE (2007).
- [31] 長島順清, 素粒子物理学の基礎 I,II, 朝倉書店.
- [32] F. ハルツェン, 他 クォークとレプトン, 培風館 (1984).
- [33] 日置善郎, 場の量子論, 吉岡書店.
- [34] B.Povh, 他, 素粒子・原子核物理入門, Springer.
- [35] 市村宗武, 他, 原子核の理論, 岩波書店 (2001).

謝辞

私を支えて頂いた方々のおかげで、無事修論を書くことができました。皆様には大変感謝しております。

指導教員である作田先生には修士で研究室に受け入れていただき、修論のテーマであるこの研究に関わらせて頂きました。また NuInt05 や NuFact07 など国際会議に参加する貴重な体験や様々な研究会へ参加させていただきました。研究会や国際会議などで修論研究以外の最前線の研究に触れることができ、様々な物理について学ぶことができました。中村先生と Benhar 先生には研究について理論的にわかりやすく教えていただき感謝しております。そして、作田先生、中村先生、Benhar 先生と共同研究させていただいたことは貴重な経験となりました。共同研究の大切さについて勉強になりました。これからの人生又は仕事においてこの経験生かせるよう頑張ります。

研究室のみなさんと一緒に過ごすことができ、充実した日々を送ることができました。皆様には様々なことを教えてもらいました。まず、作田研の皆様のおかげで、修士から入りましたが、すぐに打ち解けることができました。杉原さん、池田さんには作田研の先輩として指導していただきました。出原君の意見は的確で、私のつたない日本語など指摘してくれ、非常に助かりました。浜田君、石垣さん、吉田君は私が先輩という立場でしたが何も教えることができず、申し訳ありません。浜田君と石垣さん、吉田君がいると研究室も過ごし易い雰囲気になり、とても楽しかったです。特に浜田君は同じ時期に入った同志として共に研究室に居ると心強かったです。久保田さんは作田研の秘書として仕事している姿を見ると、大変心強かったです。美馬さん、内藤さんにはプログラムやサーバー、PC の環境設定など教えていただき、私の研究の手助けをしてもらいました。内藤さん、美馬さんのおかげで、研究を円滑に進めることができました。佐藤君は私の友人と知り合いということもあり、研究室に入って最初に話した人でした。佐藤君には一緒に受けた授業のわからないところを教えてもらいました。幸田君はいるだけ常に明るい雰囲気になり、ネタの尽きない人でした。村上君は佐賀大学居たとき、同じ岡山出身ということもあり、大学で最初に話した人でした。村上君には六年間お世話になりました。別宮さんは何かと事件を起こす人で、常に話題は尽きませんでした。高橋君、おおあえ君、内音坊君は飲み会など誘うと来てくれ、非常に楽しく場を盛り上げてくれました。岡本君、山口君、山本君は研究室で楽しそうに話していると、研究室の雰囲気が明るくなりました。研究室の皆さんありがとうございました。

佐賀大学のとて、指導教員である河野先生は修士を岡山大学へ進学することについて承諾していただき感謝しております。物理の勉強について、橋先生には多々質問し、丁寧に教えて頂きました。佐賀大学の友人には勉強面、生活面において大変助けてもらいました。佐賀大学の皆様には感謝しております。

最後に家族や友人には心の支えになってもらい、ここまでくることができました。また家族には金銭的に援助をしてもらいました。おかげで大学、大学院と進学することができました。皆様今まで大変有難うございました。